

# **Le bois, un art de vivre la mer**



**Patrick Balta-Wolber  
2019**



## SOMMAIRE

Introduction.....	7
Quelques notions d'architecture navale.....	9
Une passion.....	11
Le bois, un matériau vivant.....	17
La forme des carènes .....	35
L'esthétique.....	48
Détermination expérimentale du CG.....	68
« Matmut ».....	82
Les carènes liquides.....	92
Capacité de redressement .....	100
Les calculs d'échantillonnage .....	106
Les hypothèses .....	110
Introduction.....	128
Loi de Hooke .....	130
Flexion pure plane .....	135
Moment d'inertie des surfaces quelconques .....	145
Section asymétrique .....	159
Matériaux non isotrope .....	166
Contraintes de cisaillement.....	191
Les déformations.....	194
Rayon de courbure.....	197

Calcul de la flèche principe d'approche .....	200
cas de la poutre en porte-à-faux (console) .....	200
Cas de la poutre chargée en son milieu sur appuis simples.....	203
Cas d'une charge décentrée.....	205
Cas de la poutre encastree.....	209
Cas de la console uniformément chargée .....	210
par une masse = $pl$ .....	210
Cas de la poutre uniformément chargée .....	212
Cas de la poutre uniformément chargée par une masse $p \times$ unité de longueur, encastree sur une extrémité et appuyée sur l'autre.....	214
Gouvernail suspendu .....	219
Quand $EI$ varie .....	238
Dans le cas des bras des trimarans.....	247
Calcul d'un « raidisseur associé » en bois.....	249
Calcul de la « poutre navire ».....	257
Maintenant que nous avons les outils pour calculer le « $EI$ » d'une section constituée de matériaux composites, .....	280
La flèche ou la contrainte ?.....	289
Les composites de fibres et de résine .....	293
Les contreplaqués .....	297
Mesure des flèches .....	302
Régression orthogonale par .....	308
Détermination des modules d'élasticité $E$ en traction et en compression dans un même matériau .....	311
Choix d'une essence .....	314
Bois moulé, rebond de démoulage .....	322
Rebond de démoulage avec des formes .....	333
prédécoupées développées.....	333
Pièces longues, courbure quelconque .....	335

Éléments simplement superposés .....	337
Calculs sur modèles réduits .....	340
Exemple de quille fixée sur 5 varangues.....	343
Exemple de calcul des boulons de quille .....	349
Les Tire-fonds .....	368
Console boulonnée .....	372
Les varangues .....	377
Les espars.....	389
Quelques mots sur mon métier.....	402
Notes .....	407
Flexion 4 points.....	411
Les membrures dévoyées .....	417
Remerciements.....	426



## Introduction

Il m'a semblé utile d'insister sur le sens critique, c'est-à-dire tâcher de toujours rester dans le compréhensible, ou encore, de ne jamais prendre pour acquis ce qui n'aura pas été clairement compris. Le sens intuitif du physicien et du mathématicien doit pouvoir se concrétiser dans le réel et servir à la création et au progrès technique de manière tangible.

En partant sur des bases simples, on doit pouvoir accéder au complexe petit à petit et trouver les outils nécessaires pour résoudre les problèmes de plus en plus difficiles.

Par exemple que peut-on faire avec un simple levier et un point d'appui ? Comment appréhender l'équilibre des forces et l'équilibre des moments à l'intérieur du levier et comment s'organise l'action et la réaction...

Maintenant, il s'agit de créer un navire qui sera soumis à des forces importantes ; il devra résister aux assauts de la mer et du vent sans faillir. Il devra toujours préserver la vie humaine avant tout en restant aussi fiable que possible. Mais cela n'empêchera pas de chercher à le rendre plus efficace, plus simple à construire et plus abordable financièrement.

Un jour quelqu'un s'installera à bord, larguera les amarres et s'en ira à travers les océans en confiant sa vie à son navire, à celui qui l'aura conçu et à celui qui l'aura construit. Il confiera sa vie également aux maté-

riaux tels qu'ils existent dans la nature ou tels que les hommes les auront fabriqués par un assemblage hétérogène de fibre et de colle. Imaginez que vous confiez votre vie à un avion ou un bateau qui aura été construit sans aucune liaison mécanique mais uniquement par collage de matériaux composites divers. Quel sera votre degré de confiance ?

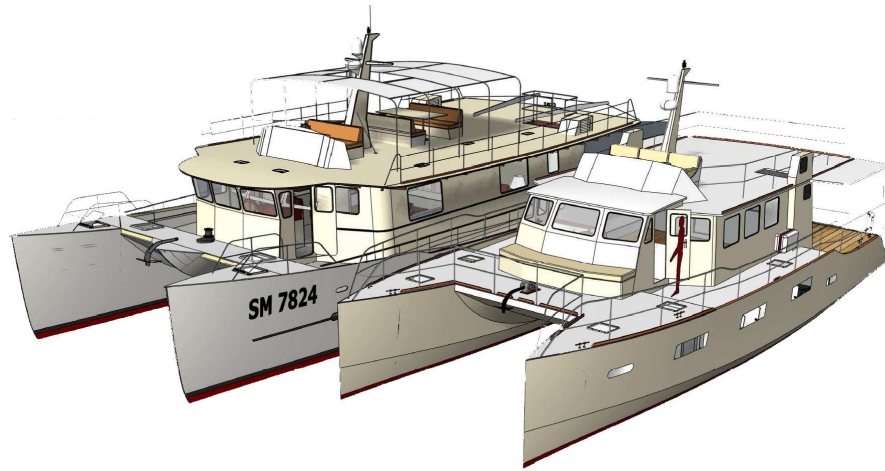
L'architecte naval est donc chargé d'une grande responsabilité morale comme tout bâtisseur.

Il se trouve que la vie m'a fait connaître des expériences pratiques de la mer et du travail du bois sous toutes ses formes.

Je suis heureux aujourd'hui de pouvoir coucher sur papier quelques éléments et quelques aspects de cette expérience afin d'en faire profiter les intéressés, au même titre que j'ai pu profiter des enseignements de mes aînés.



## Quelques notions d'architecture navale



Il ne s'agit pas ici d'un cours théorique détaillé mais seulement d'un aperçu du métier avec ses particularités et son approche générale sur les questions fondamentales.

Le métier d'architecte naval peut être abordé de différentes manières, de la plus simple à la plus sophistiquée.

L'homme commença par tailler son bateau dans un tronc d'arbre. Aujourd'hui, les pirogues issues de cette technique ancestrale donnent toujours entière satisfaction dans de nombreux endroits sur Terre sans qu'il soit utile de se lancer dans des études complexes pour les construire. On « sait » comment bien faire et tout est parfait. Il en va de même s'agissant des bateaux traditionnels, on sait comment les construire depuis longtemps selon des techniques locales largement éprouvées.

Des navires très marins ont été construits en bois se-

lon diverses techniques par les Vikings, les Grecs, les Romains, les Arabes, les Indonésiens, les Polynésiens... Ces constructeurs n'avaient pas besoin et n'ont toujours pas besoin d'un architecte naval pour réaliser leurs œuvres. Le savoir-faire éprouvé par le temps se transmet toujours de père en fils avec bonheur.

Aujourd'hui, l'architecte naval propose des plans en fonction d'un programme précis défini dans un cahier des charges étudié avec soin. En réalité, la plupart du temps il sera question d'améliorations très ponctuelles de navires déjà existants dans leurs grandes lignes. On n'invente pas le principe d'Archimède tous les jours !

Mais les études aussi bien théoriques que pratiques ont permis d'améliorer les techniques de construction et surtout permis d'imaginer, penser et réaliser un projet qui pourra satisfaire des exigences bien précises.

Cet ouvrage propose un petit aperçu du métier qui est naturellement dit comme le « plus beau du monde » par ceux qui l'aiment et qui aiment le faire partager.

Pour ma part, je reste toujours très attaché aux techniques utilisant le bois dans toutes ses formes pour des tas de raisons affectives mais surtout pratiques.

## Une passion

Un petit modèle réduit en carton peint flottait dans la baignoire : ma première création était née, elle se tenait là sur l'eau parfaitement comme il faut. Puis je l'ai testée dans un bassin du parc de la ville. Le modèle marchait fort bien à la voile comme tous les navires mais c'était le mien. J'avais 14 ans et j'étais fier.

Je rêvais beaucoup en ce temps-là, je rêvais que je me construirai plus tard un petit voilier tout simple et je partirai avec lui à travers le vaste monde. Mon bateau serait un monde déjà à lui seul, un monde que je pourrais emporter partout avec moi. Il serait d'abord mon « chez moi » le lieu où me retrouver, où respirer, aimer, vivre, manger et dormir.

J'imaginai donc un endroit chaleureux, un chez moi à mon image, un endroit que j'aimerais partager avec ma femme et avec mes amis, un endroit qui serait un petit paradis sur terre et sur mer. Je pensais également aux tempêtes que j'avais déjà connues. Mon bateau devrait être fort, il devrait être capable et digne de confiance, il devrait vaincre les éléments, les dominer et les calmer.

Mais ce n'est pas tout, mon bateau ressemblerait à l'idée de l'esthétique qui m'habite et qui serait ma marque de fabrique, en un mot il serait à mon image, celle que je fantasmais, celle que je pensais choisir.

Un psychanalyste saura dire des choses sur la question, sans doute que le bateau porte une symbolique puissante et devient vite un objet d'identification pour un temps ou pour toujours.

Peu importe le symbole pourvu qu'on ait l'ivresse !  
C'est ainsi qu'il devint indispensable à ma vie.

Pendant des années, je n'ai pas cessé de rêver, de dessiner, de fabriquer des modèles réduits, de me renseigner ici et là pour savoir comment les bateaux étaient pensés et construits et comment ils ont évolué dans l'histoire. J'ai tout appris, de la quille à la pomme de mâât. Le nom de toutes les parties intimes des navires n'avaient plus de secret pour moi, j'étais devenu un dictionnaire maritime vivant !

Mais ce n'était pas encore suffisant pour bien faire...

Tracer les lignes d'une belle carène à la main est un exercice assez difficile et exigeant mais très plaisant et très gratifiant. A force d'essayer, de défaire et de refaire, mes tiroirs se sont rempli d'avant-projets qui m'ont formé la main et apporté l'expérience de l'art du dessin que personne ne peut transmettre. Le métier demande une dimension artistique tout à fait personnelle qui ne saurait être enseignée autrement que par soi-même.

Simultanément, je me suis perfectionné dans les métiers du bois : menuiserie, ébénisterie, charpenterie et ébénisterie de marine. Le bois porte en lui un charme et un attrait qu'aucun autre matériau ou aucun composite ne peut supplanter. Il donne à la fois la couleur, l'odeur et le toucher chaleureux comme la nature l'a fait croître et devenir. Des milliers d'essences existent ; elles permettent de combler à l'envi les désirs esthétiques et les besoins mécaniques. Depuis la nuit des temps les hommes ont su comment utiliser le

chêne, le pin, le sapin, l'épicéa, le mélèze, le cèdre, les bois fruitiers ou les chaudes essences tropicales toutes plus magnifiques les unes que les autres choisies avec soin pour l'usage qui leur correspond à merveille.

Le bateau peut devenir comme un instrument de musique à cordes dans lequel il serait possible de vivre en harmonie.

Mais le bateau devra posséder les qualités marines avant tout, ou comme on dit « bien tenir la mer », marcher à bonne vitesse et savoir remonter au près correctement, être un « fin voilier » ; il devra tenir sa voilure avec force, être bien équilibré, rapide, robuste et fiable.

Et puis à force et petit à petit j'ai dessiné le bateau idéal, celui qui correspondait totalement à ce que j'étais à cette période de ma vie. Je l'ai appelé « L'enfant Perdu » pour des tas de raisons. C'est le nom d'un phare planté sur un îlot minuscule au large devant la rade de Cayenne. Cet îlot est le dernier d'un chapelets d'îles : les Mamelles, la Mère, le Père, le Malingre et l'Enfant Perdu. Le nom porte aussi une symbolique qui me correspond sans doute, à moi et à beaucoup d'autres ; hommage à tous les enfants perdus du monde. J'ai dessiné beaucoup de navires mais celui-ci restera, devant tous les autres, mon petit préféré.

Il ne mesure que 12 mètres et pèse moins de 5 tonnes.

C'est assez pour se retrouver, c'est assez pour partir très loin..

On commence la visite en posant un pied déchaussé sur le pont. Le navire parle tout de suite par les sensations qu'il procure. On entre dans le dialogue avec émotion. D'abord la manière dont il répond à l'acceptation de notre propre masse par sa réaction sur l'eau donne déjà une idée de son caractère. Nous prend-il pour un fétu de paille ou pour un animal pesant ? Comment se manifeste-t-il en gîtant et en roulant presque imperceptiblement ? La réponse est immédiate : on le voit déjà s'adresser à la mer, on sait que sa démarche sera vivace ou débonnaire, comme ça, au premier contact sur le pont.

Un jour que j'étais assis à la terrasse d'un bistrot dans une rue de Quimper, je fondais d'admiration pour la cathédrale.

Le temps s'était presque arrêté pour moi à cause du spectacle grandiose. J'observais les proportions des diverses parties entre elles et je fus saisi par une sorte de sentiment de plénitude absolue en constatant à quel point l'ensemble était composé avec harmonie.

L'aspect séduisant général se révélait aussi dans le choix des dimensions des pierres. Elles étaient exactement celles qui convenaient pour satisfaire par une incroyable élégance, à la fois les besoins mécaniques et les besoins esthétiques. En un mot les mesures étaient exactement les bonnes, ni trop, ni trop peu et suffisantes pour que l'édifice tienne debout comme il se doit sans devenir trop lourd. C'est ainsi que je le ressentais avec intérêt et bonheur.

J'essaie de concevoir mes bateaux de cette manière en choisissant les dimensions avec « juste ce qu'il faut et pas plus ». On gagne ainsi sur deux tableaux, le poids et l'esthétique.

Il en va de même pour un peu tout, y compris pour le décor intérieur. A ce sujet je me demande si je ne suis pas un rescapé de la vieille école avec des principes trop arrêtés. J'aime le style « marine » qui donne tout de suite l'ambiance des vrais yachts grâce à des boiseries « classiques ». J'aime me sentir “chez moi” dans un bateau pour résumer en un mot.

Aujourd'hui, on tend à laisser le « design » aux décorateurs, ce qui donne des choses parfois très belles et parfois étranges. Il arrive qu'on entre dans un bateau comme dans le salon d'une maison où il ne manquerait que la cheminée. Là dedans, le bureau est équipé d'un ordinateur qui s'occupe de tout. Son écran trace la route grâce au GPS, il indique le cap à tenir et prévient des risques d'abordage.

A la fois je trouve que le progrès est confortable et à la fois je ne ressens plus la mer comme dans mes souvenirs et dans mon vécu passé. Quelque chose a disparu, le côté « pénible » de la mer, du vent et des embruns, sans doute. Je ne regrette pas les désagréments, certes non, mais je me demande si le prix du bonheur ne s'y tenait pas un peu tout de même.

Je sais naturellement que le sens de l'esthétique évolue avec le temps. Ce qui était bien peut devenir désuet et lassant, voire lourd, sombre et austère.

Mais je n'y peux rien, je garde une immense nostalgie pour les yachts signés Fife, Alden, Herreshoff et

d'autres encore dans ce style d'une rare élégance qui nous manque tellement. Je ne trouve plus aucun charme dans les prototypes de course dessinés uniquement pour l'efficacité maximum en dehors de toute autre considération.

Notre métier se présente donc sous des aspects esthétiques et techniques. Mais l'architecte naval indépendant doit également savoir vendre son travail pour en vivre. Selon les capacités des uns ou des autres, les différentes approches seront plus ou moins facilement abordées !



## Le bois, un matériau vivant

Le bruit du vent dans le feuillage d'un arbre nous montre à quel point les branches sont agitées en permanence sans jamais se fatiguer. La matière vivante s'est adaptée à ces contraintes qui ne cessent presque jamais durant la longue vie de l'arbre !

C'est dire combien le bois résiste à la fatigue.

On pense à ce que supportent les bras de liaison sur un multicoque : exactement les efforts alternés subis à longueur de temps par nos chers arbres !

Il existe des milliers de variétés de bois, des bois lourds et durs, des bois tendres et légers, des bois très résistants, plus ou moins souples ou nerveux, des bois entremêlés de contre-fils et d'une bonne cohésion transversale, des bois très faciles à refendre... Ce dernier sera parfait pour la fabrication de bardeaux, par exemple le Robinier qui est à la fois dense et très durable. Pour construire des charrettes, le Frêne sera idéal, pour tourner des pièces, on recherchera plutôt un Hêtre qui est difficile à fendre ; pour fabriquer des violons, des guitares, des pianos, l'Épicéa des montagnes sera le meilleur de tous pour faire entendre sa voix ; cela tient à ses qualités élastiques que nous verrons plus loin...

A chaque usage son bois de prédilection !

Venons à nos navires en bois.

A priori on pourrait penser qu'un bois dur et résistant

fera l'affaire pour supporter de gros efforts très fréquents et parfois violents. Peut-être est-ce une bonne solution si le poids de l'ensemble n'entre pas en ligne de compte. Mais pour nos yachts et nos multicoques de plaisance, nous chercherons toujours à limiter autant que possible le poids du navire afin d'améliorer les performances. Par ailleurs un navire plus léger est soumis à moins de contraintes, on entre de la sorte dans un cercle vertueux !

Alors quelle configuration en bois sera la plus solide et la plus rigide ? A ce sujet il faut bien séparer les deux aspects de la question : solidité et rigidité.

La solidité permet de résister aux forces externes avant rupture. La rigidité permet de limiter les déformations sous la contrainte.

Essayons quelques petits tests rapides pour nous aider à choisir le bois idéal qui donnera le meilleur rapport poids / résistance et poids / rigidité.

Par exemple, posons sur deux supports espacés de 1 mètre, des planchettes de poids égal, usinées dans différentes essences de 40 mm de largeur.

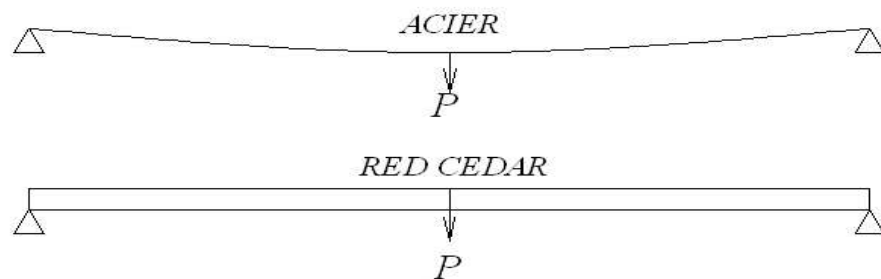
On décide que les planchettes pèseront toutes **500** grammes, ce qui déterminera à chacune leur épaisseur en fonction de leur densité propre.

On charge chaque planchette avec une masse de 1 kg exactement au milieu des supports et on note la valeur des flèches ainsi obtenues. Ensuite on cherche à briser la planchette en ajoutant du poids.

Ce petit exercice donne immédiatement des résultats d'une manière limpide et flagrante :

- Le Chêne fléchit de 1,46 mm et se rompt sous une charge de 46 kg. Épaisseur : 14,7 mm
- L'Épicéa fléchit de 0,27 mm et se rompt sous une charge de 125 kg. Épaisseur : 27,7 mm
- Le Red Cedar fléchit de 0,23 mm et se rompt sous une charge de 135 kg. Épaisseur : 31 mm

Voilà déjà des données qui peuvent surprendre. N'oublions pas que les échantillons pèsent tous le même poids, c'est ce qui fait l'intérêt des tests.



- L'acier est complètement largué, il ne supporte pas une charge supérieure à 1,64 kg avant de se plier (E24 et selon les nuances). Sous son propre poids, la lame d'acier accuse déjà une flèche de 25 mm sans être chargée.

L'aluminium est un peu meilleur, il pourra admettre de porter 20 kg avant de se plier lui aussi. En comparaison avec le Red Cedar, le contraste est de taille !

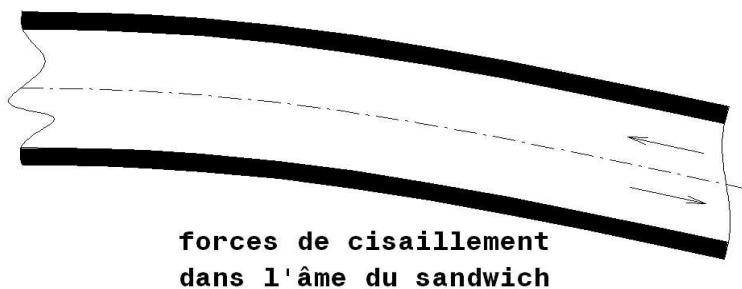
Il faut dire que : à poids égal, l'acier aura une épaisseur de 1,6 mm tandis que le Red Cedar aura une épaisseur de 31 mm. Toute la différence se tient dans ce rapport des épaisseurs qui est presque de 1 / 20, comme le rapport des masses volumiques :

$$7850 \text{ kg/m}^3 / 400 \text{ kg/m}^3 = 19,62.$$

J'entends d'ici les remarques à ce sujet : « si le bois est tellement supérieur au métal alors pourquoi les super tankers ne sont-ils pas construits en bois ? »

La réponse tient à la constitution naturelle du bois : il n'est pas isotrope, c'est-à-dire qu'il travaille dans de bonnes conditions uniquement lorsque les efforts sont orientés dans le sens de son fil. Le bois est très performant quand il travaille en flexion, c'est donc ainsi qu'il faut l'appréhender et l'orienter dans le bon sens.

- Un sandwich (toujours de poids égal) avec âme en mousse pvc de  $100 \text{ kg/m}^3$ , de 30 mm d'épaisseur, recouvert sur chaque face d'un UD (unidirectionnel) de 600 g de verre dans le sens des efforts comme pour le bois, fléchira de 0,61 mm dans les mêmes conditions. En réalité la flèche sera supérieure car la mousse se déforme dans le sens longitudinal sous les effets du cisaillement, ce qui n'est pratiquement pas perceptible avec le bois.



L'échantillon sera détruit sous une charge environ de 260 kg. L'âme en mousse donne la limite de la résistance alors que l'UD n'aura pas atteint son maximum. Avec un UD de carbone, la flèche passe à 0,16 mm et

la charge de rupture à 260 kg, toujours sous l'effet du cisaillement de l'âme.

[La détermination des éléments d'un composite optimisé en poids est très complexe ; le propos ici n'est pas d'effectuer une analyse qui mènerait trop loin.]

Le Red Cedar nu cédait sous 130 kg. La différence est importante mais le prix n'est pas du tout le même et la mise en œuvre du sandwich oblige à investir dans des outillages particuliers comme des moules sophistiqués et des pompes à vide. Ces dépenses ne seront jamais amorties après la construction d'un seul exemplaire, c'est totalement impensable, à moins de commander un kit prédécoupé ? (à quel prix ?)

Une construction à l'unité en bois ne demande qu'un simple outillage portatif et ne nécessite aucun moule complexe.

On peut retenir qu'à poids égal, pour vraiment se démarquer du bois, il faudrait utiliser des fibres exotiques comme le carbone et des âmes en nid d'abeille, ce qui nous mènerait loin des budgets initiaux.

Laissons les fibres exotiques, bien trop chères, de côté et retenons les fibres de verre alliées à la résine époxy. Elles présentent surtout un avantage pour leur résistance à défaut d'être très rigides par rapport à leur poids. Un mariage composite de bois et de fibre de verre vient naturellement à l'esprit pour constituer un matériau super performant à un prix très abordable.

Les calculs ci-dessus concernent directement la « peau » du navire - ou son bordé - qui est la partie la

plus lourde de l'ensemble du « gros œuvre ».

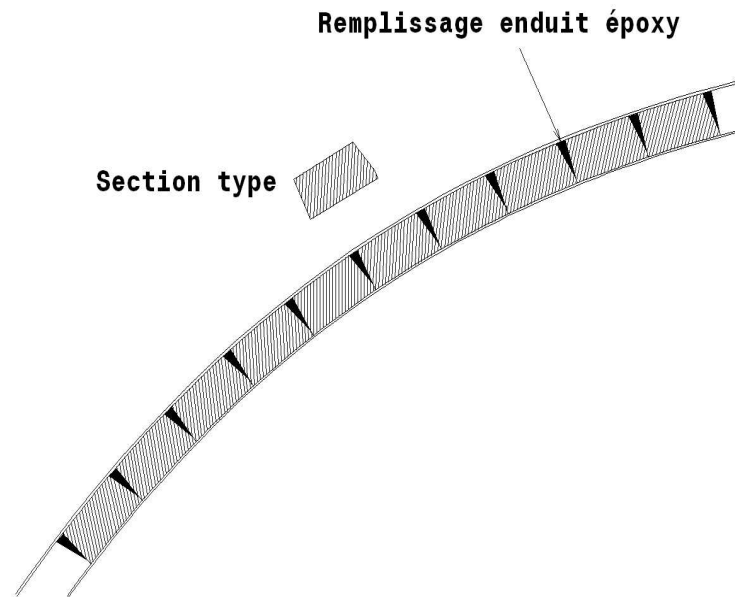
La coque travaille en flexion entre les supports de la structure interne et participe à la rigidité de la « poutre navire » dans son ensemble, par exemple lorsque la mer est bien formée et que l'avant et l'arrière reposent sur deux crêtes de vague.

Une peau trop mince ne pourra pas résister contre la mer, sauf si la structure interne est adaptée à l'épaisseur du bordé. Finalement un bon mariage sera l'union du bois et des matériaux constituant les « composites ».

Alors que peut-on faire de meilleur avec le bois et le verre ?

En ce qui concerne le bois massif (par opposition au contreplaqué), la méthode la plus répandue aujourd'hui est celle dite du « strip planking » ou des lisses ou virures jointives.

La technique est simple : on débite, ou bien on commande, des lisses « au kilomètre », d'un profil constant décidé au préalable. Certains fournisseurs sont équipés d'une raboteuse « 4 faces » et proposent de livrer rapidement les pièces usinées et calibrées à la perfection.



Puisque le bois n'est pas isotrope, on peut facilement l'améliorer avec un tissu de verre appliqué sur les deux faces dont les fibres seront orientées à  $90^\circ$  du fil du bois, ou à  $\pm 45^\circ$ , tout est envisageable. Cet habillage verre / époxy donnera de plus l'avantage considérable d'isoler le bois du milieu extérieur, ou en quelque sorte, de le mettre en conserve pour très longtemps.



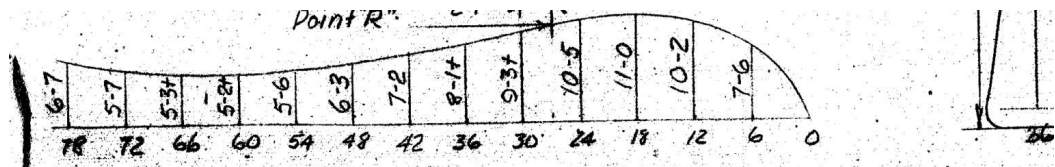
Construction du « Gorfou » de Hamish

On considère souvent cette configuration comme un sandwich avec une âme neutre en bois, c'est une erreur, l'âme de ce « sandwich » n'est pas neutre du tout ! Comme je l'ai montré plus haut, à poids égal, le bois est souvent plus résistant que s'il était armé de fibre de verre... Cela demande toujours une petite étude de confirmation. Les idées « a priori » sont parfois erronées. L'essentiel est de trouver la configuration qui donnera le meilleur du composite ainsi constitué pour une application particulière, toujours en respectant la priorité dans les paramètres, le poids, la résistance ou la déformation acceptable.

Lorsque les formes présentent une courbure importante, le procédé du strip planking peut quasiment se passer de structure interne. La carène ressemble alors à un œuf résistant à la pression par « effet de coque ». C'est ainsi que Dick Newick pensait certaines de ses coques très légères en « strip » de Red Cedar. [À ce sujet, précisons que le Red Cedar – Thuya Plicata - est presque imputrescible grâce à sa composition chimique toxique : les bactéries ne l'apprécient pas tellement !]

Pour son modèle « Echo » entre autres, Dick Newick avait imaginé des formes dessinées avec une unique courbe tirée de l'avant à l'arrière de la carène, perpendiculairement à la quille et au livet. Cette « courbe » lissait automatiquement toute la carène à partir d'un seul tracé :

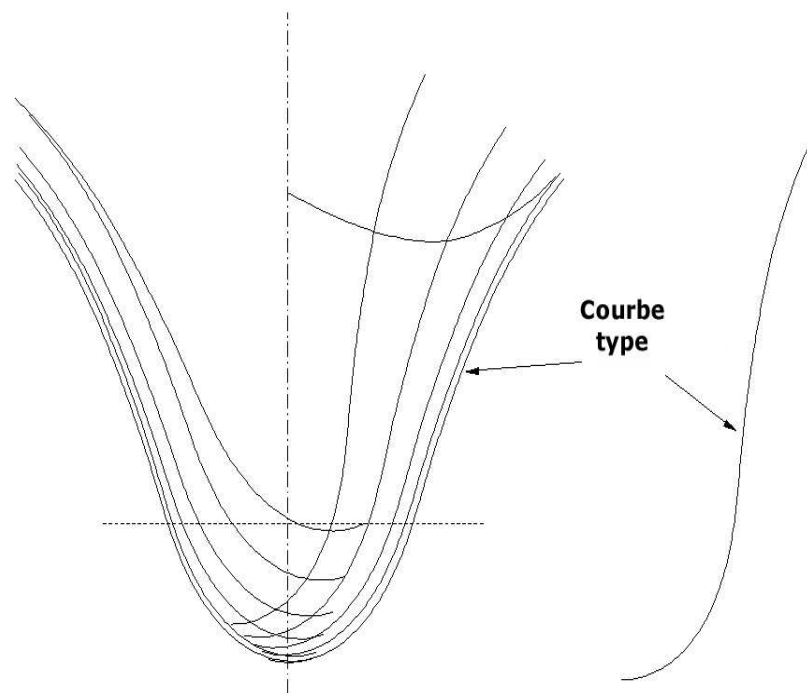




MASTER PATTERN Stations spaced 6" offsets in inches and eighths

to loft vaka: layout  $\phi$  profile and 18" WL as shown (at right)

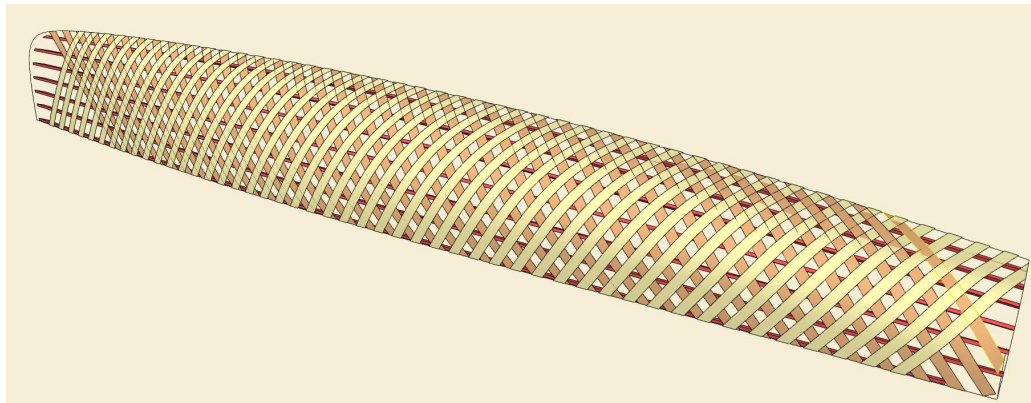
full size, transfer these points to body plan (above). Join these points with master pattern (above) keeping point "R" on reference diagonals "R". Lines are to outside of  $5/8$ " planking take sheer half breadth from full size body plan lofting





C'était une façon de réaliser simplement une coque harmonieuse, surtout à l'époque où aucune aide informatisée n'était disponible.

Il existe une autre manière de former une jolie coque en bois : le bois moulé :



Le procédé consiste à croiser et contre-coller des plis de bois minces comme illustré ci-dessus. (Ici avec une latte sur deux pour le clarté du dessin.)

Les lattes sont ajustées sur des lisses posées dans le sens longitudinal, elles mêmes fixées sur des gabarits. Pour une coque « autoporteuse, il est nécessaire

d'installer au moins 3 plis pour garantir une forme stable et solide. Le matériau ainsi constitué sera plus homogène que le strip planking car le fil du bois est croisé et les forces sont mieux réparties.



Dans cet exemple, « Adèle », le dernier voilier d'Alain Maupas en bois moulé d'Épicéa, construit chez Charlie Capelle, les lisses ne restent pas dans la coque, elles ne servent que de « moule » de montage.



Le bordé est ensuite stratifié pour le rigidifier davantage et protéger le bois, avant la pose des aménagements et du pont. Cette procédure est mécaniquement performante mais demande un certain doigté pour la mise en œuvre car toutes les lattes doivent être ajus-

tées les unes par rapport aux autres.

La faiblesse du procédé concerne la « poutre navire » pour laquelle il peut manquer du bois dans le sens longitudinal pour résister au moment de flexion de la carène toute entière. Cela ne regarde que les navires assez grands mais il fallait le souligner malgré tout.

Ces méthodes « autoportées » demandent une certaine épaisseur de bordé avec assez d'inertie pour se tenir sans supports ou presque. L'avantage immédiat est la simplicité.

Maintenant si le souci est de gagner à tout prix le moindre kilogramme, il vaut mieux opter pour la méthode « aviation » : peau mince sur structure dense.

Le strip planking demandera de nombreuses membrures pour être supporté dans le sens de la longueur du navire, alors que le bois moulé demandera de nombreuses lisses. Lequel des deux procédés sera le plus léger ? La réponse ne peut être donnée que par une analyse très fine et surtout objective.

On peut également installer des plis de bois moulé sur un premier pli de strip planking et on obtient alors une coque extrêmement robuste surtout si elle est structurée à l'intérieur par de nombreuses membrures. Cette dernière configuration ne se soucie pas trop du poids et ne concerne en aucun cas nos rapides multicoques.

Dans ce domaine, on doit se méfier des arguments qui donneront la préférence à un type de construction ou à un autre, ils ne sont pas toujours d'ordre mathématique ; d'autres facteurs entrent en lice pour emporter la décision avec des ordres de priorités différents de ceux du poids ou du simple prix des matériaux.

Ces méthodes permettent de réaliser des coques en forme très aisément mais on peut encore faciliter la construction en choisissant des carènes à bouchains vifs. Dans ce cas le contreplaqué s'impose d'office comme matériau idéal pour sa facilité de mise en œuvre. Par ailleurs, une belle finition sera obtenue assez rapidement.

Le contreplaqué est plus isotrope que le bois massif puisqu'il présente deux sens de travail orientés à 90° grâce à ses plis croisés. Je ne reviendrai pas sur le choix des essences donnant la plus grande résistance à poids égal, on retombera inexorablement sur les bois les plus légers ! Un contreplaqué dit « marine » en bois dense comme le Moabi, l'Afrormosia, le Sapelli, l'Angélique... sera extrêmement lourd et difficile à former pour obtenir des surfaces « développables ». Ce n'est donc pas ce genre de contreplaqué qu'il faudra choisir de toute évidence, bien qu'il soit désigné à tort comme « marine ». (L'appellation signifie que ces contreplaqués sont plus durables sans protection, ce qui n'a rien à voir avec les qualités mécaniques).

L'Okoumé est très bien adapté pour la fabrication d'un contreplaqué léger. On le trouve ordinairement réalisé selon la norme NF « CTB-X Marine » qui doit respecter des contraintes draconiennes de collage en milieu extérieur humide. Son prix est nettement plus abordable que celui des contreplaqués de luxe décoratifs et lourds.

Continuons nos comparaisons avec le CTBX dans les

mêmes conditions que précédemment, toujours avec un échantillon de 500 grammes.

Les calculs ci dessous concernent un contreplaqué de 5 plis standard.

- Le CTBX fléchit de **0,76 mm** et se rompt sous une charge de **50 kg** avec une épaisseur de 25 mm. Le sens privilégié sera celui du fil apparent ou du fil en travers, cela dépend de la constitution des plis intérieurs.

- Essayons le CTBX avec une seule face stratifiée 600 g 0-90 (50% pondéral de verre sur total verre/époxy) sur son côté étiré, c'est-à-dire sur la face extérieure d'un bordé :

Il fléchit de **0,81 mm** et se rompt sous une charge de **48 kg**

son épaisseur théorique est de 22,6 mm... Pas de commentaire.

- Avec les deux faces stratifiées 600 g 0-90 :

Il fléchit de **0,87 mm** et se rompt sous une charge de **54 kg**

Son épaisseur théorique est de 20,2 mm...toujours pour le total de 500 grammes. Cet échantillon est très légèrement plus solide mais moins rigide que le CTBX sans stratification.

Si la stratification est constituée du même poids en UD de verre, l'épaisseur et le poids seront identiques mais :

l'échantillon fléchira de **0,70 mm** et se rompra sous

une charge de **67 kg**. L'amélioration n'est pas très flagrante.

Avec de l'UD de carbone (600 g) les choses deviennent nettement meilleures : (épaisseur 20,2 mm) l'échantillon fléchira de **0,27 mm** et se rompra sous une charge de **172 kg**. Le poids de l'ensemble étant toujours égal à 500 grammes.

Ici le gain devient manifeste, trois fois plus performant que le CTBX nu mais à quel prix ?

Si la question du prix devient rédhibitoire, alors reste-t-il un avantage à stratifier le contreplaqué avec du verre ?

Voilà qui donne à réfléchir car la peau de verre-époxy présente tout de même un intérêt de taille : il augmente beaucoup la résistance à l'impact ponctuel et protège efficacement le bois.

Par ailleurs, les fabricants proposent des épaisseurs et des nombres de plis arrêtés ; il n'est pas possible de commander les épaisseurs déduites de la théorie pour une application particulière. Il faut donc s'adapter au mieux avec les standards et la stratification peut apporter des solutions élégantes.

L'échantillon de Red Cedar nu à poids égal est 2,5 fois plus résistant que le contreplaqué stratifié et 3,5 fois plus rigide, mais dans le sens de son fil uniquement, Le Red Cedar ne vaut rien en travers de son fil, on doit obligatoirement le stratifier pour une meilleure cohésion transversale, et également pour durcir sa surface. Il est plus cher à l'achat et surtout à la mise en œuvre. L'Épicéa est moins cher à l'achat que le Red

Cedar et disponible en France. Pour une coque « en forme » il reste un bon compromis.

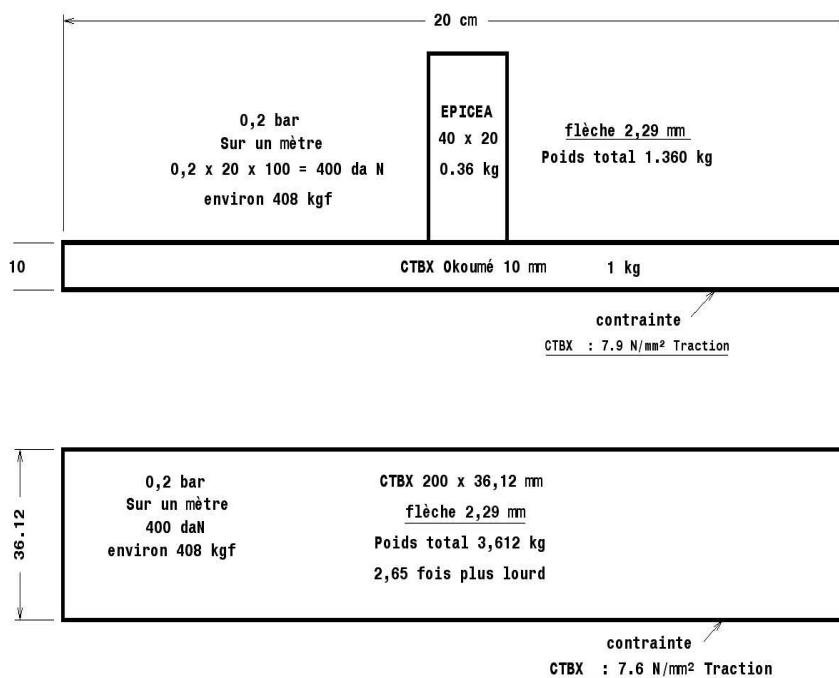
L'avantage du contreplaqué se résume donc dans l'avantage des deux sens d'orientation de ses fibres et en sa grande facilité de mise en œuvre. Ce dernier point revient à dire que la construction sera plus abordable financièrement.

Voyons maintenant ce que donne un bordé en contreplaqué monté sur lisses ou sans lisses et supportant les mêmes effets mécaniques :

Un CTBX de 10 mm est collé sur une lisse d'Épicéa de 40 x 20 mm sur chant.

L'ensemble est soumis à une force totale de 408 kgf répartie sur toute la surface entre des appuis espacés de 1 mètre.

On déduit la flèche (2,29 mm) et on calcule l'épaisseur théorique d'un CTBX sans renfort qui obtiendrait la même flèche sous la même charge :





Les deux échantillons supportent quasiment les mêmes contraintes (7,9 et 7,6 N/mm<sup>2</sup>)

En revanche le poids total est 2,65 fois plus lourd que le montage avec une lisse, tout est dit !

Cet échantillonnage a été choisi « a priori » pour l'exemple présent, il n'est pas optimisé. Les choix des dimensions et des matériaux de chaque pli d'un composite sont infinis et le dessin final peut devenir extrêmement complexe à décider. De plus, la détermination d'un « bon composite » ne dépend pas uniquement de ses qualités mécaniques mais aussi des disponibilités, des prix, de la facilité de sa mise en œuvre, de sa durabilité, de son entretien, de ses qualités isolantes et diélectriques, etc... On place tous ces paramètres sur la table et on se relève les manches !

On pourrait imaginer de réduire l'épaisseur du bordé à presque rien sur une structure très élaborée comme sur les avions avec la peau en toile...

Mais il faut oser ! Des problèmes de concentration de contraintes existent aussi et une telle construction peut se ruiner de proche en proche à partir d'une faiblesse locale... Les normes CE prévoient la question en n'acceptant pas des épaisseurs de bordé inférieures à une certaine limite en fonction de la résistance ultime en flexion du matériau, de la vitesse maximale du navire et de son déplacement. A partir de cette épaisseur, on peut commencer à réfléchir à la structure interne en formant un « composite » avec le bordé, ses raidisseurs et ses renforts de fibre de verre ou de carbone.

Des logiciels de calculs « par éléments finis » des contraintes réparties dans la matière existent et sont une aide précieuse mais l'opérateur décide toujours des

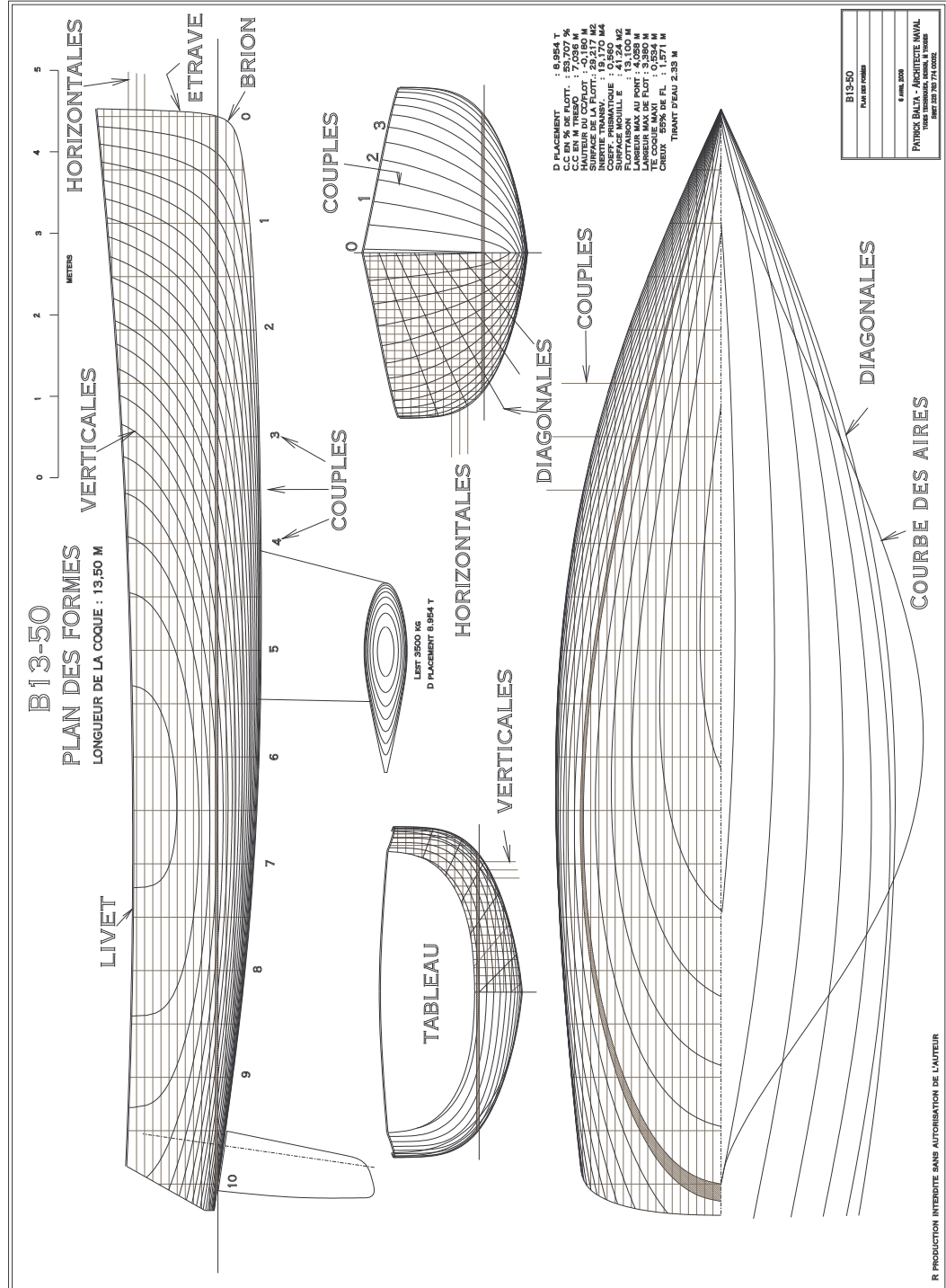
des hypothèses (forces appliquées) et de l'échantillonnage en fonction de l'orientation des fibres et des modules d'élasticité de chaque constituant. Il ne faut surtout pas imaginer qu'un logiciel conçoit tout seul une structure optimisée ! (pas à ma connaissance.)

Je ne peux pas clore ce chapitre sans parler de l'intérieur à vivre.

Un bateau en bois bien réalisé dès le départ n'aura besoin d'aucun vaigrage décoratif. La structure entière peut rester apparente car le bois saura toujours se montrer chaleureux et agréable à la vue et au toucher. Il isole également assez bien de la chaleur et du froid. Tout est compris dans la formule !

\*

# La forme des carènes

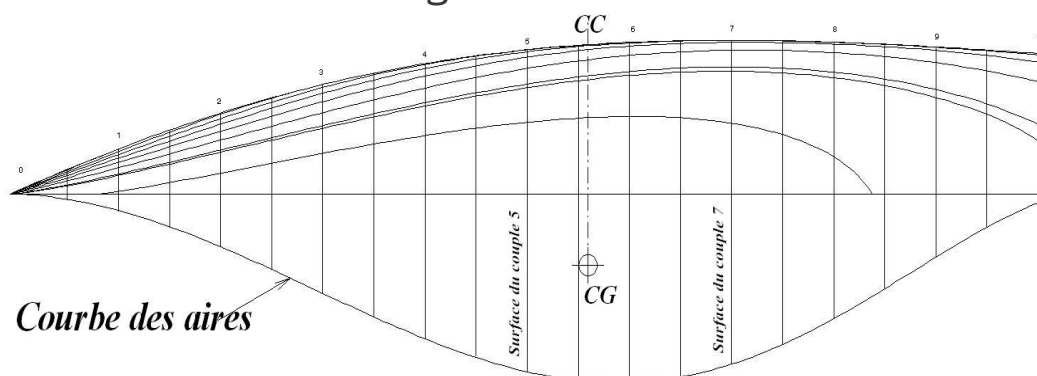


R PRODUCTION INTERDITE SANS AUTORISATION DE L'AUTEUR

Mes premiers plans relevaient plus de mon appendice nasal que du reste de ma personne. J'imaginai comment l'eau devait circuler tout en douceur autour de la carène dessinée pour offrir un minimum de résistance. Tel était mon cheminement créatif.

Et puis j'ai commencé à lire moult théories plus ou moins argumentées surtout écrites par les Anglais et les Américains.

Je me souviens particulièrement des théories de Colin Archer – norvégien d'origine écossaise - avec sa fameuse « courbe des aires » qui devait se rapprocher approximativement des cycloïdes ressemblant à celles du mouvement des vagues.



Pour tracer une « courbe des aires », on porte en ordonnées les valeurs des surfaces des couples (sections) immergées du navire, placées régulièrement le long de la ligne de flottaison dans sa longueur. Cette courbe présente obligatoirement une certaine figure en relation directe avec la répartition du volume immergé de la carène. La mesure de son aire donne automatiquement le déplacement du bateau et la position du centre de carène  $CC$  sera son centre de gravité  $CG$ .

Cette théorie n'est qu'une théorie, elle ne tient absolument pas compte de la répartition des masses dont

dépend l'assiette du navire, ni de la forme de la surface de la flottaison qui influence de manière bien plus tangible le comportement du navire à la mer.

La discussion s'engage ensuite sur les préférences des bateaux larges ou étroits. Les débats sont animés sur ce sujet, surtout en buvant des bières ou des rhums des îles lointaines pour aider à la réflexion et parfois au délire.

Mais ce n'est pas tout, d'autres avancent des idées carrément mystiques comme : «... je suis le détenteur de la connaissance universelle » (véridique, tenu par un confrère architecte naval aujourd'hui disparu). Cela signifie-t-il, selon ce genre de certitude, que rien ne sera jamais mieux pensé jusqu'à la fin des temps ?

Les choses ne sont pas si simples. En règle générale, ce qui est acquis d'un côté est plus ou moins perdu de l'autre ; le gain se tient dans le « plus ou moins » qui fait toute la différence. La différence avec quoi de prévisible au juste ? Une idée, une conviction, une certitude, guident notre conception et l'orientent dans un sens ou dans un autre. Tout cela finit pas donner un « style » selon des critères bien précis qui nous différencient entre les architectes navals au milieu d'une époque avec ses « tendances ».

Finalement existe-t-il une manière purement scientifique de dessiner un bateau qui ne tiendrait pas compte de l'esthétique, de l'ergonomie, de l'habitabilité, du confort à bord, ni de toutes ces choses qui font les « yachts » de plaisance ? Oui probablement ! On partirait d'une forme « a priori » et on essaierait une ma-

quette en bassin de carène à grands renforts de capitaux pour que cela soit possible. On essaierait nombre de variations comparatives dans nombre de situations de mer et de vent. Puis on s'armerait d'un certain génie pour transposer les résultats obtenus à l'échelle « grandeur nature » en connaissant la différence de viscosité de l'eau selon les échelles grâce aux travaux de Froude et de Reynolds.

Maintenant revenons sur notre bonne vieille Terre bien concrète.

Un client se présente chez moi avec le désir de me commander les plans d'un bateau, un simple bateau comme ça, pour son plaisir. Ses raisons de m'avoir choisi ne sont pas toujours très rationnelles, il faut le dire. En gros, il aime bien mes travaux, ou bien il pense que mon savoir-faire lui permettra de passer du rêve à la réalité puisque c'est mon métier ; en ce sens il me fait honneur.

En général il ne prend pas la réelle mesure de ce que représente l'étude d'un nouveau navire. Par ailleurs ses moyens sont toujours limités. Va-t-on le renvoyer chez lui en lui expliquant poliment que son budget n'est pas suffisant pour payer seulement une petite fraction du prix de l'étude de son bateau ?

Non, ce n'est pas raisonnable. Nous avons besoin de vivre un peu même si la passion nous entraîne parfois dans des « plans » que je qualifierais de pertes et profits, disons plutôt de pertes, le profit peut éventuellement se mesurer par un petit gain de notoriété... Éventuellement.

L'architecte de petit bateaux de plaisance ne propose-

ra pas d'études avec essais en bassin sur maquettes au premier venu, c'est une évidence !

Alors on travaillera sur des plans qui seront quasiment des copies de ce qui existe déjà dans nos cartons ou ailleurs, avec de petites variations et de petites améliorations très prudentes. Pour ma part je tâche de m'appliquer sur les méthodes de construction lesquelles rendent les projets plus abordables et plus rationnels.

Je me suis fait dans le métier à la fin des années 60, comme les anciens, sans aucun bagage sinon mon goût pour le dessin et l'amour de la mer.

Ce n'était pas un démarrage des plus évidents dans ces conditions mais il faut dire que les choses étaient plus faciles en ce temps-là.

Imagine-t-on aujourd'hui ce que représentait les méthodes de travail sur papier ? On tâchait au maximum de prévoir la fin de l'étude avant de l'avoir commencée car le simple fait de dessiner un dossier de plans représentait une somme d'efforts très conséquente. On avait acquis une sorte de génie de l'économie de temps, je crois que là se tenait le gros des problèmes. On cherchait à élaborer un plan des formes sans jamais revenir dessus, heureusement avec succès dans la plupart des cas. Mais il faut dire que cela n'incitait pas spécialement à l'innovation quand il s'agissait de vivre de ce noble art.

Il reste que sans notoriété, le métier est toujours impossible à mener. Il ne suffisait pas de coller une plaque « Architecte naval » sur sa porte pour faire venir les commandes ! Les rares clients désirant faire appel à

un architecte naval, ne pouvaient trouver que celui qui était déjà connu sur la place, cela allait de soi. Les nouveaux devaient faire leurs preuves d'une manière ou d'une autre, par la fortune personnelle, la chance de trouver un ami confiant, la chance d'intéresser un journaliste spécialisé et la chance de se trouver au bon endroit au bon moment...

Alors en attendant, à côté de mes travaux théoriques, la vie m'a entraîné sur les bateaux de pêche et sur les bateaux de plaisance, puis j'ai travaillé dans des ateliers d'ébénisterie, et dans des chantiers navals où j'ai pu commencer à améliorer les méthodes en imposant de passer par les études avant de s'attaquer au vif du sujet. Énoncé ainsi, cela peut paraître prétentieux mais le passage par le bureau d'étude n'était vraiment pas dans les usages de l'époque.

À un certain moment je me suis fait embaucher, à Châteauneuf les Martigues, pour construire un petit voilier en contreplaqué selon des plans existants.

Je n'avais aucune expérience sinon celle de quelques réalisations personnelles de petits canots. Le patron décida de me laisser tenter ma chance. Il était un ancien compagnon du tour de France, son état d'esprit était réellement respectueux de certaines valeurs, à savoir de toujours s'intéresser aux us et coutumes des autres.

Il avait monté sa boîte d'ébénisterie et voulait se lancer dans la construction navale. Je ne le remercierai jamais assez pour tout ce qu'il m'a appris en si peu de temps. J'ai eu l'impression d'avoir vécu une vie professionnelle à son contact, ce qui n'était évidemment pas le cas, mais j'avais été conquis par les valeurs du



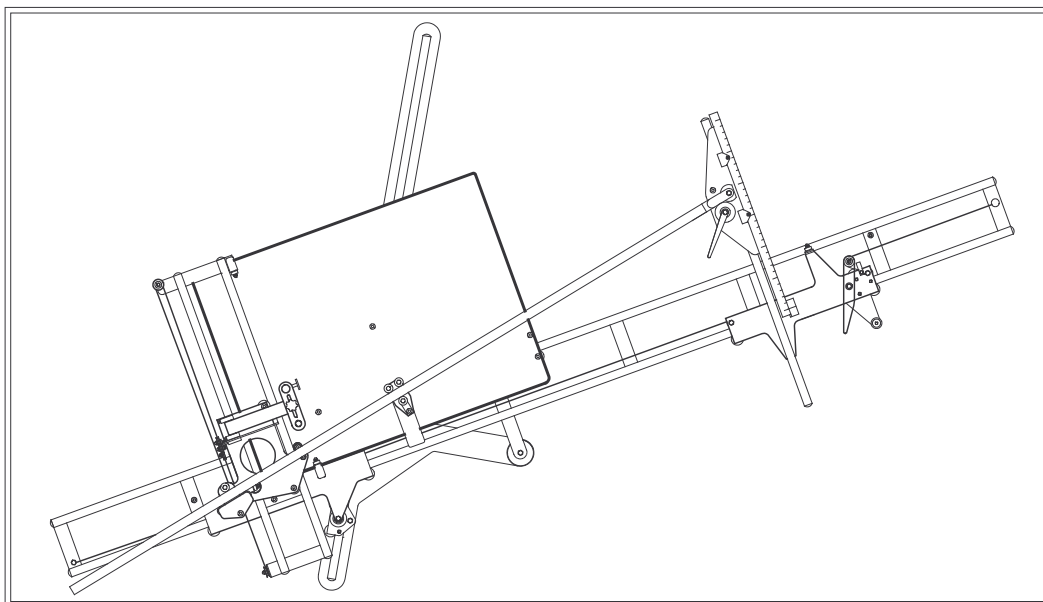
métier que je pourrais résumer ainsi : « montre-moi ce que tu sais faire et comment tu le fais... »

Il est des circonstances heureuses qui imprègnent un homme à jamais. Pour marquer le coup à la fin de l'ouvrage, il me commanda un plan des formes d'un voilier de 15 mètres, juste pour dire, juste en souvenir, juste en amitié.

J'avais également été imprégné par l'épisode du pointu que j'ai appelé « Rochambeau » lorsque j'étais patron de pêche.

Tout cela pour en venir aux méthodes de travail et aux méthodes de tracés. Mon intérêt pour le tracé m'avait incité à dessiner un chalutier en acier de 12 mètres, un caseyeur de 8 mètres et un voilier de 12 m, conçus en formes entièrement développables à l'aide d'épures à n'en plus finir travaillées pendant un nombre d'heures incalculable. Ces épures permettaient de tracer directement les développés de toutes les parties de la carène. Le travail simultané sur 3 ou 4 vues en même temps demandait une organisation à toute épreuve avec beaucoup d'imagination pour se représenter les objets dans l'espace à partir d'une feuille de papier en deux dimensions. Les épures bien menées avec méthodes permettaient de travailler avec raffinement pour la beauté des œuvres produites. Pensez aux épures d'escaliers en colimaçon construits sur des cœurs en ellipses variables ; tout cela est merveilleux mais demande un temps et un art qui n'est plus envisageable autrement que comme passe-temps pendant la retraite. Mais ces exercices n'étaient pas inutiles en soi car ils obligeaient à un certain entraînement au dessin géométrique qui m'a mené à imaginer des procédés

nouveaux, comme des nouvelles tables de calculs des hauteurs à la mer pour le point astronomique ou l'invention de mon traceur mécanique de perspectives.



Les problèmes de géométrie et de trigonométrie ont été efficacement résolus grâce aux calculettes apparues sur le marché dans les années 70. Je me suis rapidement équipé avec les premières calculettes programmables et j'ai commencé à écrire mes logiciels de dessin des carènes qui permettaient de sortir des cotes sans défaut. J'utilise toujours mes logiciels aujourd'hui, très améliorés, bien entendu. Cela me permet une indépendance et une maîtrise totale de mes outils pour les formes, pour les calculs hydrostatiques et pour les calculs de résistance des matériaux.

Tout cela ne donne rien sur l'efficacité d'un plan des formes, mais je reste persuadé et je crois que l'expérience des navires existants sera toujours irremplaçable. On ne part donc jamais complètement de zé-

ro...

Une forme de carène est adaptée au poids total du navire et à la stabilité requise. Une carène large sera latéralement plus stable mais demandera plus de toile qu'une forme plus étroite et moins dure à la mer. Toute comparaison se faisant toujours à poids égal ou selon des critères précis à définir comme par exemple la capacité à partir au planing.

Juger « dans l'absolu » n'a pas vraiment de sens.

L'équilibre ou le bon compromis n'est pas toujours donné par de simples convictions *a priori* mais par les résultats de longs calculs comparatifs qui tiennent également compte de nombreux autres paramètres, comme les questions d'inertie, de confort, d'ergonomie, de facilité de construction, de coût, etc.... L'expérience permet aussi de passer d'une création à une autre en améliorant les défauts des navires précédents pour peu qu'une analyse précise et objective aura été menée.

Chaque architecte adopte une manière de dessiner ses formes en commençant par le début, le milieu ou la fin. Mais tout le monde doit respecter un déplacement correspondant obligatoirement au poids fini du bateau équipé et habité pour qu'il ressemble un tant soit peu à ses desseins d'origine.

Des ancêtres astucieux ont tracé des abaques de la moyenne des bateaux selon la longueur et selon d'autres critères de base. Ces abaques donnent le poids fini du projet pour un type de construction, ainsi que la surface de toile nécessaire à le faire avancer et le rapport de poids du lest pour qu'il tienne debout.

Ces abaquages sont utiles dans un premier temps mais seulement pour une approche globale.

Finalement après avoir dessiné un certain nombre de navires, les pronostics deviennent de plus en plus évidents, cela va sans dire.

L'architecte convaincu de détenir la connaissance universelle avait tout de même un peu raison dans la mesure où le cerveau humain est capable d'estimer « au jugé » des choses assez concrètes qui fonctionnent sans l'aide de la science mathématique. Il m'a fait remarquer que son meilleur bateau était le premier de toutes ses créations. Ce bateau était purement le fruit de ses intuitions et de sa culture uniquement esthétique de la marine du siècle dernier. Il voulait me dire, en substance, que le début de sa démarche théorique l'avait « pollué » et que ses créations postérieures étaient moins satisfaisantes. Il se méfiait en conséquence, de son cerveau rationnel préférant écouter son cerveau sensible, exactement comme le disait Marcel Dassault.

Beaucoup de choses se font de cette manière, il est vrai. Personne ne pensera à prendre une calculatrice pour savoir quelle devra être l'épaisseur d'une planche à découper des côtes de bœuf. On ne calculera pas non plus quel sera le diamètre de la barre franche ou l'épaisseur des lattes de teck collées sur un pont en contreplaqué. Le « bon sens » existe dans bien des domaines, il serait idiot de ne pas le reconnaître. Le bon sens, l'expérience et la connaissance des navires existants permet de résoudre bien des questions. La connaissance s'enrichit de jour en jour surtout lorsque

des incidents ou des accidents se produisent. Ce sera une occasion de se pencher avec acuité sur le problème et d'apprendre encore.

Après 60 ans d'expérience (pour peu que le temps y joue un rôle..) je me suis également détaché de bien des principes, formules et analyses qui ne m'apportaient rien de concret. Par exemple quelle sera la place théorique du centre de carène d'un navire et quel sera l'effet d'une variation de cet emplacement sur les performances attendues ? Problème sans consistance réelle : le centre de carène sera toujours situé sur la même verticale au dessous, ou au dessus du centre de gravité général du navire, de gré ou de force ! Cela concerne plus des questions de répartition des masses que des variations sur les formes de la carène qui ne peuvent pas être tellement modifiées sous peine de pénaliser l'hydrodynamisme.

Un bateau est conçu pour être chargé avant tout. L'agencement intérieur, les réservoirs, le moteur, le gréement, les équipages, la cambuse, le groupe électrogène, les batteries, les équipements, les outils, les réserves, le mouillage, la sécurité, la cuisine, la table à cartes, les matelas, le lest, etc, etc.... tout cela se tient dans une structure qui possède son poids et sa répartition des masses, voilà exactement où se situe le centre de carène et nulle part ailleurs.

Exemple d'une liste de devis de poids et centre de gravité :

Éléments	Poids	LCG	VCG	TCG
XII - ÉLECTRICITÉ électronique				
Groupe électrogène ONAN 165 kg + liquides env	176,00	17,900	1,179	0,536
4 MDKBH 4.0 kW à 2400 tr/min (50 Hz)				
Conducteurs Câblage etc env ...250	250,00	15,000	0,920	
Batteries de démarrage des D6 : 70 A 22 kg 22*2	44,00	17,750	0,159	
Batteries de service 6 de 73 kg : 73*6	438,00	11,800	0,159	
Batteries pour guindeau : 2 70 A : 1*22	22,00	3,890	1,670	
Chargeur 230 V 100 A	8,00	11,780	0,800	
Onduleurs-convertisseurs 5000 W Mastershine	44,00	11,750	1,120	
Eclairage, feux env 30	30,00	15,000	3,000	
<b>TOTAL PARTIEL : 836,000</b>				

LCG, VCG et TCG : longitudinal, vertical et transversal positions des centres de gravité des éléments.

Chaque partie ou élément du navire doit être relevé et placé dans le devis de poids. Il faut ajouter les charges variables, liquides, équipements et équipage, ce qui ne simplifie pas les choses.

Le total donne le poids et le CG général qui doit se situer exactement sur une verticale passant par le centre de carène CC du navire pour que ce dernier flotte et se positionne exactement dans les lignes prévues sur le plan des formes.

On conçoit immédiatement que cet exercice demande beaucoup d'entraînement et de doigté pour tomber juste du premier coup. Ce qui n'arrive jamais, disons presque jamais au delà d'une certaine tolérance. Certains confrères me confiaient qu'ils ne se souciaient plus du tout de dresser un devis de poids depuis belle lurette, c'est dire à quel point les études progressaient lentement d'un projet à l'autre...

En théorie et pour bien faire, il convient de « descendre » une première fois tout le navire dans tous ses détails, puis d'ajuster les formes comme il se doit afin que tout entre précisément dans les prévi-

sions. Cela demande de refaire entièrement le plan de construction général à chaque ajustement s'il en est. Alors dire que le centre de carène doit se trouver à tel endroit avant de dessiner le premier trait, tient plus du miracle que d'autre chose !

Les formes jouent fortement dans le sens transversal sur la stabilité du navire, voilà une sorte d'évidence indiscutable. On parle de « stabilité de forme ». La stabilité varie avec l'angle de gîte, c'est la raison pour laquelle on précise la « stabilité initiale ». Un multicoque aura une très forte stabilité initiale mais chavirera au-delà de 70 ou 80° de gîte alors qu'un monocoque moins stable chavirera très longtemps après, au-delà de 120, 130, ou même 170° de gîte. L'approche n'est pas du tout la même.

On s'aperçoit rapidement que trop de stabilité initiale rend le navire insupportable. Tout doit être considéré en même temps lors de la conception.

Pour continuer cette discussion, peut-on produire une sorte de navire idéal pour un usage précis ?

Peut-être oui, mais l'objectivité totale est-elle possible ? Après une longue période d'étude, de construction et de financement parfois très élevé, le navire navigue et donne sa quintessence : est-il vraiment comme nous l'avions voulu et rêvé ?

\*

## L'esthétique

L'esthétique ne sert à rien ?

Marcel Dassault : « Un bel avion est un avion qui vole bien ». Citation célèbre. Je l'approuve comme tout le monde car tout le monde sait ce que veut dire « être beau », au moins pour lui-même, ce qui revient à dire que la citation est adaptée à chacun d'entre nous. On dirait presque un pléonasme !

Il est des discussions incroyables sur ce thème à décliner à l'infini – voir esthétique de l'infini – de quoi se noyer dans des profondeurs insondables qui ne ressemblent plus à rien.

On évoque des concepts comme la symétrie, l'harmonie, l'ordre, la mesure et toutes les notions qui procurent des sentiments agréables pour les uns et pas forcément pour les autres...

La mode influence considérablement la perception esthétique du monde, des objets, des hommes et des femmes à tel point que les créations d'une époque se ressemblent toutes plus ou moins, ce qui permet de les dater. L'époque Louis XV, régence, empire, romantique, baroque, art nouveau, etc...

Les goûts changent pour tout le monde en même temps, semble-t-il. L'évolution fait dire que la fonction crée l'organe, je me demande si l'inverse n'est pas aussi vraie. Une idée pas toujours bien justifiée captive l'engouement général au point de rendre désuètes les plus belles réalisations datant à peine d'une année. Il

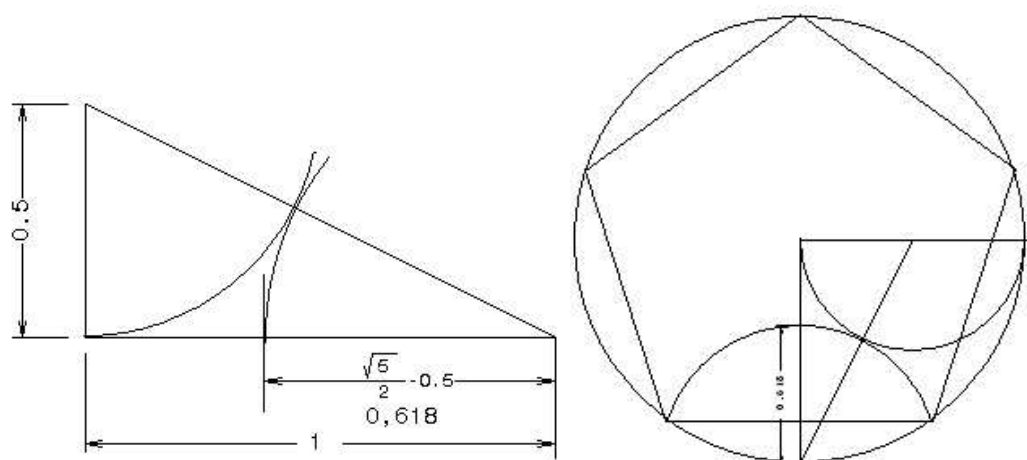


est par exemple admis comme meilleur de vouloir faire passer les navires à travers les vagues, quelle que soit leur vocation, plaisance, pêche, ou course. Je ne suis pas persuadé que la formule soit si heureuse. Mes étraves plutôt hautes ont l'excellent avantage de ne point arroser l'équipage à tous moment. Tout cela se discute naturellement...

Pour ma part, j'attache une importance considérable aux lignes de mes bateaux qui sont autant d'amis à respecter et à cajoler. La recherche de l'esthétique est toujours une priorité à tous moment dès qu'un objet doit être créé, même si la définition du beau et du moins moche n'est pas toujours rationnelle ni évidente.

Un jour, je dessinais un capot à claire-voie classique et je devais décider quelles seraient ses proportions, longueur, largeur « ...Tiens, et si j'utilisais le fameux nombre d'or ? » Pourquoi pas, voilà une façon de se faire guider en harmonie, s'il en est. Alors qu'est-ce que le nombre d'or ?

### Tracé géométrique

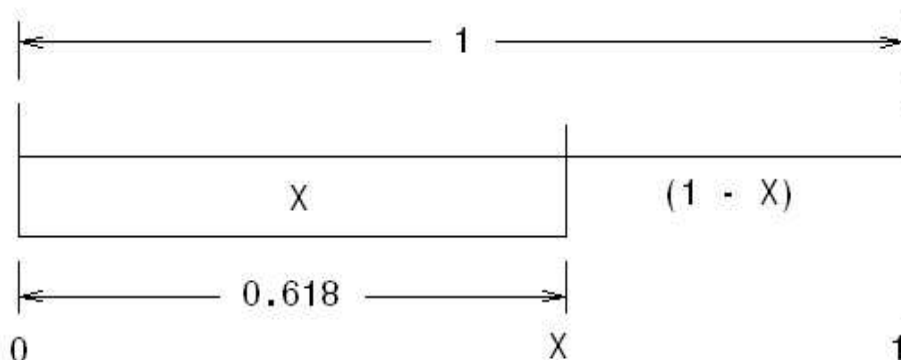


...utile pour la division du cercle en 5 parties (pentagone).

Section d'or : la plus grande partie d'un segment divisé en moyenne et extrême raison.

« Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit. »

### Calcul algébrique



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1-x = x^2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Équation du second degré, 2 racines (voir notes en fin de volume)

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 + 4}}{2} \dots\dots\dots x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618 \dots\dots x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = 1,618$$

Y a-t-il de la magie dans ces calculs de proportions ? En tous cas, la division du segment ainsi calculée n'est pas désagréable, alors pourquoi ne pas utiliser ces chiffres plutôt que n'importe quels autres ? Le panneau à

claire-voie aura donc ces proportions de  $1 \times 0,618$  en longueur et en largeur. Je n'accorde pas plus de pouvoir « magique » à ce nombre qui reste ce qu'il est.

Pour continuer sur le sujet de l'esthétique, la question demeure : faut-il faire comme la mode et suivre les goûts de l'air du temps ou rester dans ses propres nostalgies ?

Le danger est de perdre son âme, de se noyer dans la foule des inconnus et de finir sans clientèle. Notre métier demande beaucoup de notoriété sans quoi rien ne sera possible. Une signature avec un nom se modèle dans la durée, longtemps. Il faut donc avancer prudemment et tâcher de préserver son capital artistique. Mais le dialogue ne doit pas être rompu pour autant, en aucune manière.

J'entends parfois que les architectes navals de renom se prennent pour des « diva », qu'il ne faut jamais contrarier sous peine de se faire foudroyer sur place ; aucun compromis ne sera jamais possible avec eux et quelques fois non plus avec moi. C'est là une attitude expéditive pour éviter les problèmes, à n'en pas douter. Car les problèmes existent forcément en conséquence d'avoir accepté un petit compromis. Les choses se terminent alors très mal devant un tribunal pour exiger réparations. Les préjudices moraux ne seront jamais totalement effacés, comme chacun le sait. J'ai évidemment connu ce genre de problèmes pour mon malheur. Notre métier n'est pas de devenir procédurier, nous avons bien d'autres soucis à gérer. Est-ce que le futur navire en gestation sera un bon navire ? Voilà où sont nos préoccupations avec la responsabili-

té de prendre en compte la vie des hommes et des femmes seuls au milieu de l'océan, de savoir où sont les risques et de les prévenir.

Pour la plupart des marins – dont je fais partie – la question esthétique est de première importance, souvent même si les manœuvres doivent être plus difficiles à manipuler !



(Mon plan du cotre franc « Micalvi » de 13,50 m)

La question esthétique m'a mené loin mais tout se tient dans ce domaine qui doit rester un ensemble cohérent.

## Il flotte

Qui ne connaît pas la fameuse « poussée d'Archimède » ?

...Tout corps plongé dans un liquide, etc...

Mais pourquoi au juste ?

Il s'agit d'une histoire de pression, ou mieux, de différence de pression.

A la surface de l'eau, la pression est celle donnée par le poids de l'atmosphère, environ un bar au niveau de la mer.

Un  $m^2$  supporte donc une pression atmosphérique totale d'environ  $1 \text{ bar} \times 10000 \text{ cm}^2 = 10000 \text{ daN}$ , convertis cela donne  $10,19 \text{ tonnes-force/m}^2$ . On comprend mieux comment se calcule la force des ventouses. Une ventouse de 12 cm de diamètre présente une surface de  $113 \text{ cm}^2$  et subit donc une pression de 1130 Newton ou 115 kilogrammes-force...

Pour les problèmes des corps immergés, on ignore la pression atmosphérique qui est considérée comme constante, elle n'intervient donc pas dans les calculs hydrostatiques qui ne s'intéressent qu'aux différences de pression.

L'unité de pression du système international (SI) est le Pascal (Pa) qui équivaut à 1 Newton (N) par  $m^2$ .

Le Newton est l'unité de force qui accélère une masse de 1 kg de  $1 \text{ m/s}^2$ . Une masse de 1 kg subit donc une force d'attraction terrestre de 9,81 Newtons.

$$F = ma$$

Comme nous avons  $10.000 \text{ cm}^2$  dans un  $m^2$ , il faut

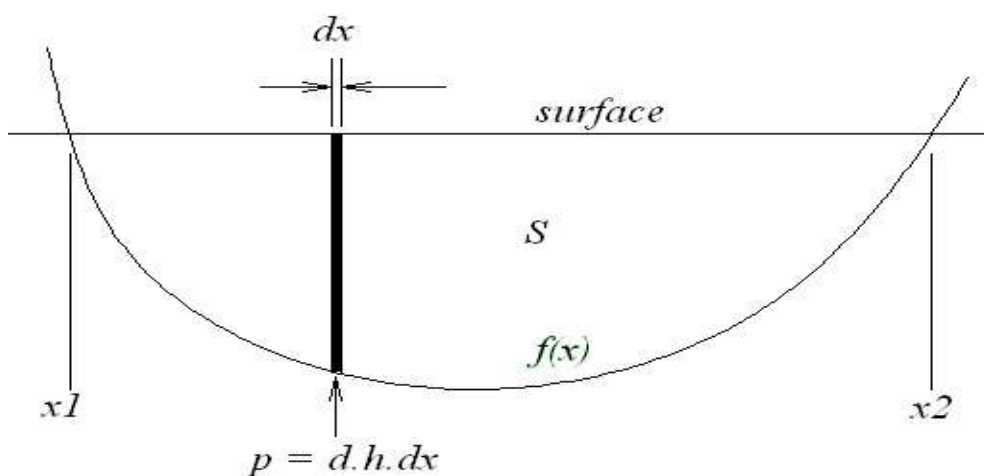
diviser le Pascal par 10.000 pour avoir la pression par  $\text{cm}^2$ , ce qui n'est pas très abordable tel quel...

À l'inverse une pression de 1 bar ou 10 Newtons/ $\text{cm}^2$  équivaut à 100.000 Pascal ou 100 kPa ou 1000 hPa...

À un mètre de profondeur, la pression peut se calculer ainsi : prenez une colonne d'eau de mer de  $1 \text{ cm}^2$  de base et de 100 cm de hauteur. Combien pèsera-t-elle ?  $100 \text{ cm}^3 = 0,1 \text{ litre} \approx 0,1 \text{ kg}$  d'eau. La pression à la base de la colonne sera donc de 0,1 kgf ou environ 0,1 bar, ou exactement  $0,1 \text{ litre} \times 1,025$  (densité de l'eau de mer)  $\times 9,81 = 1,0055 \text{ N}$  ou 0,10055 daN.

Tous les 10 mètres de profondeur, la pression augmente de 1 bar. On imagine la pression au fond des Mariannes à 11.000 mètres de profondeur : 1.100 bars !

Sans aller si loin, si vous vous tenez debout dans l'eau jusqu'au cou, et que vos pieds se tiennent à 1,50 m de profondeur, ces derniers subissent une pression de 0,15 bars alors que votre cou à la surface ne subit aucune pression. Il en résulte donc une force dirigée de bas en haut vers l'endroit où la pression est moindre.



Étudions un volume immergé ayant cette section comme dessinée ci-dessus.

La courbe  $h=f(x)$  est immergée entre  $x_1$  et  $x_2$

La pression  $p$  est directement proportionnelle à la profondeur  $h$ .

En tenant compte de la densité du liquide  $d$ , cela donne finalement  $p=d.h.dx$ .

A la surface la pression est considérée égale à zéro et la différence entre la pression à la profondeur  $h$  et la surface sera donc égale à  $d.h.dx-0$ . (La pression atmosphérique sera la même à toutes les profondeurs...)

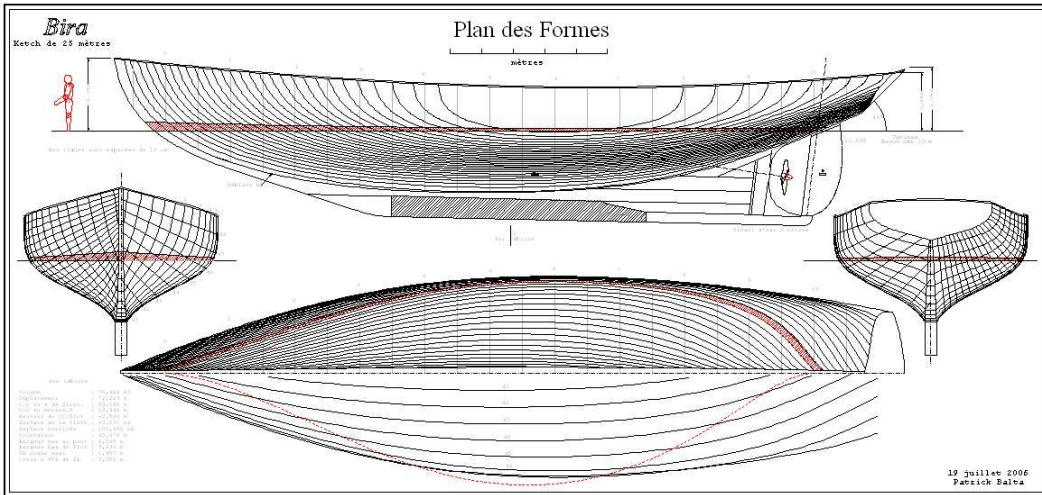
Le calcul de la somme de tous les  $p=d.h.dx$  entre  $x_1$  et  $x_2$  donne la pression totale résultante de l'ensemble.

$$\text{Soit } P_{\text{totale}} = d \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = d \times \text{surface de } S$$

Si le corps était entièrement immergé, il faudrait faire la différence des hauteurs, et donc de pression, entre le bas et le haut de la colonne de base  $dx$  pour obtenir la résultante.

Le raisonnement est le même pour un volume entier, ce qui démontre simplement et intuitivement le théorème d'Archimède.

## Maintenant, le calcul...



Ci-dessus, mon plan d'un ketch de 25 mètres construit en Indonésie.

Lorsque les lignes sont tracées, il faut calculer le déplacement du bateau et la position du centre de carène.

En principe pour un type de bateau, on choisit un « coefficient prismatique »  $k$  avant de dessiner le premier trait. Imaginez la section du plus grand « couple » immergé. On calcule sa surface et on la multiplie par la longueur de la flottaison pour obtenir un volume  $V_p$ .

Pour un bateau de ce genre relativement étroit, on peut tabler sur un coefficient prismatique approximatif de 0,55. C'est-à-dire que la carène ne remplira le volume défini précédemment que dans un rapport de 55%. Plus le rapport est élevé plus on se rapprochera des formes des péniches avec des avants et des arrières très pleins. Ceci aura une influence sur la formation des vagues autour de la coque...

Bien entendu, il faut également estimer le poids du fu-



tur navire avant de s'attaquer aux lignes.

Avec le poids  $P$ , la longueur de la flottaison  $fl$  et le coefficient prismatique  $k$ , on peut déduire l'aire  $b2$  du « maître-couple immergé » et enfin le dessiner :

$$b2 = \frac{P}{k \times 1,025 \times fl}$$

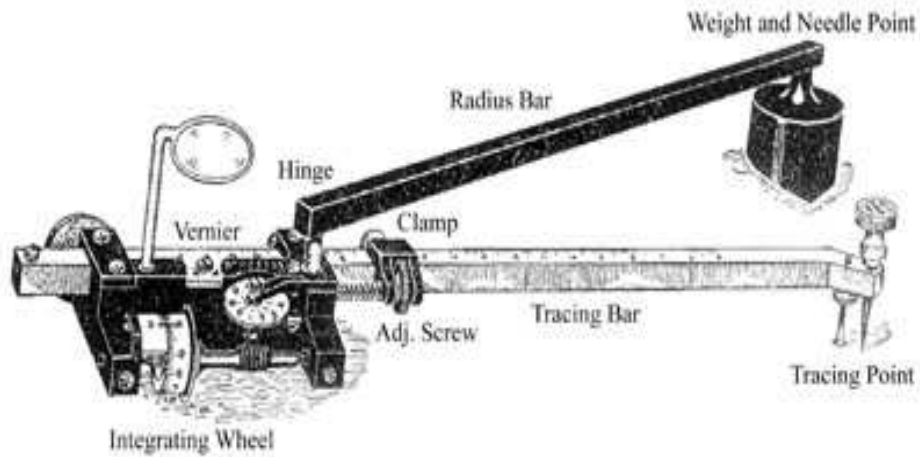
1,025 étant la densité moyenne de l'eau de mer.

Lorsque la carène est tracée, on vérifie le volume et la position du CG de ce volume, le « centre de carène ».



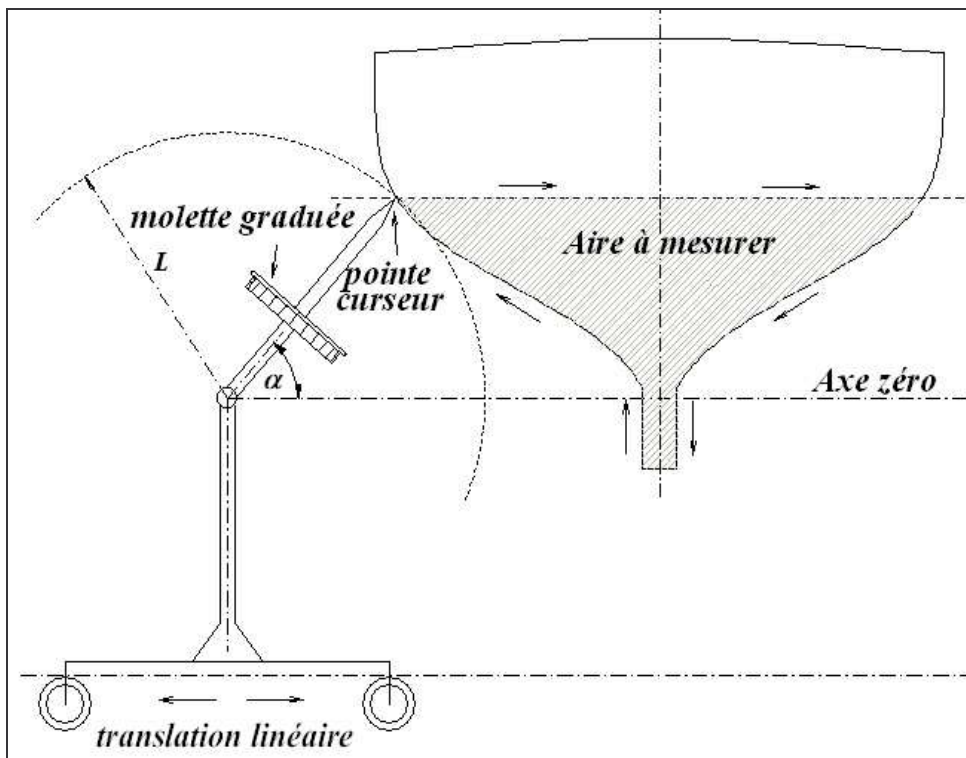
Avant l'avènement des ordinateurs, on mesurait les surfaces grâce à des outils ingénieux comme les planimètres, sorte d'intégrateurs mécaniques très utiles également pour déterminer les moments des surfaces.

## Le planimètre



Pour mesurer l'aire de la surface dessinée, on en fait le tour à l'aide de la pointe. Le résultat est lu sur les cadrans des molettes.

Il existe des planimètres polaires ou de translation linéaire. Pour expliquer le fonctionnement, prenons la translation linéaire :



Pendant que le curseur suit le tracé de la surface, la molette tourne par effet de friction sur le papier. Elle tourne plus ou moins en fonction de l'angle  $\alpha$  pendant que le chariot se translate linéairement de gauche à droite ou de droite à gauche parallèlement à « l'Axe zéro ».

Imaginons que  $\alpha$  soit calé à zéro et que le chariot fasse un aller et retour d'une distance  $d$  : la molette ne tourne pas du tout et les graduations indiquent zéro, ce qui est évident.

Maintenant calons  $\alpha$  à  $90^\circ$ . Le chariot parcourt une distance  $d$ . On lira sur la molette une valeur égale à :  $d \times L$  puisque la molette est calibrée de cette manière : un tour de molette parcourt une distance  $= \pi D$ .

$D$  étant le diamètre de la roue portant sur le papier.

Si  $L$  mesure par exemple 10 cm, la graduation de la molette pour un tour devra marquer la valeur de  $10 \times \pi D$ , le résultat en  $\text{cm}^2$  dans ce cas.

Après que le chariot a parcouru la distance  $d$  avec  $\alpha = 90^\circ$ , nous déplaçons le curseur afin que  $\alpha$  se positionne à  $0^\circ$ . La molette indique une valeur supplémentaire disons  $h$ .

Puis nous faisons revenir le chariot à son point de départ. La molette ne tourne plus et continue à indiquer la valeur  $d \times L + h$

Enfin nous ramenons le curseur au point de départ.

La molette tourne en arrière de la valeur égale à  $-h$ .

Finalement la molette indique  $d \times L$ .

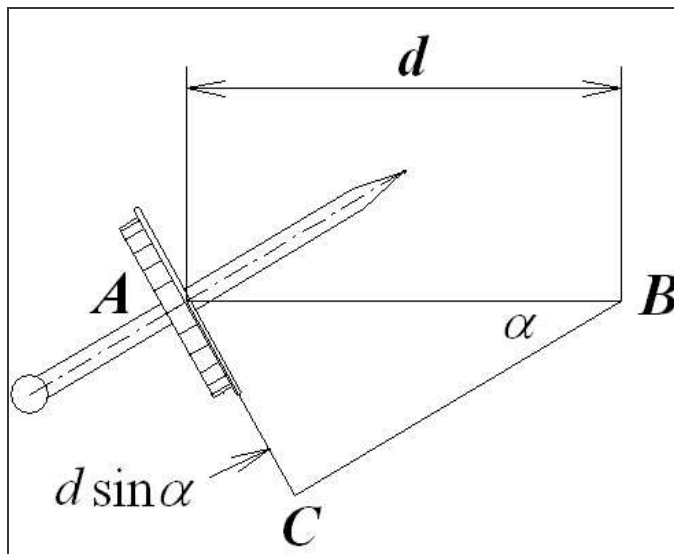
Nous avons en réalité fait le tour d'un rectangle de dimension  $d \times L$  et la molette indique exactement la va-

leur de l'aire de dimension  $d \times L$ .

Lorsque l'angle  $\alpha$  est calé à  $30^\circ$  par exemple et que le chariot se déplace d'une distance  $d$ , la molette indiquera une valeur  $d \times L \times \sin \alpha$  soit  $d \times L \times 0,5$ .

Les mouvements du chariot de gauche à droite ajoutent des mesures sur la molette dans la partie au dessus de l'axe zéro et soustraient les mesures dans la partie sous l'axe zéro. Les mesures sont inversées lorsque le chariot se déplace de droite à gauche.

Les mouvements du bras du curseur de haut en bas s'annulent finalement si on revient bien au point de départ.



Lorsque le chariot se déplace de la distance  $d$  de  $A$  à  $B$ ,

La molette tourne comme si elle se déplaçait en  $C$  sur une distance  $= d \sin \alpha \dots$

En parcourant les périmètres des surfaces de forme quelconque, la molette intègre en temps réel la valeur

de l'aire délimitée par le tracé.

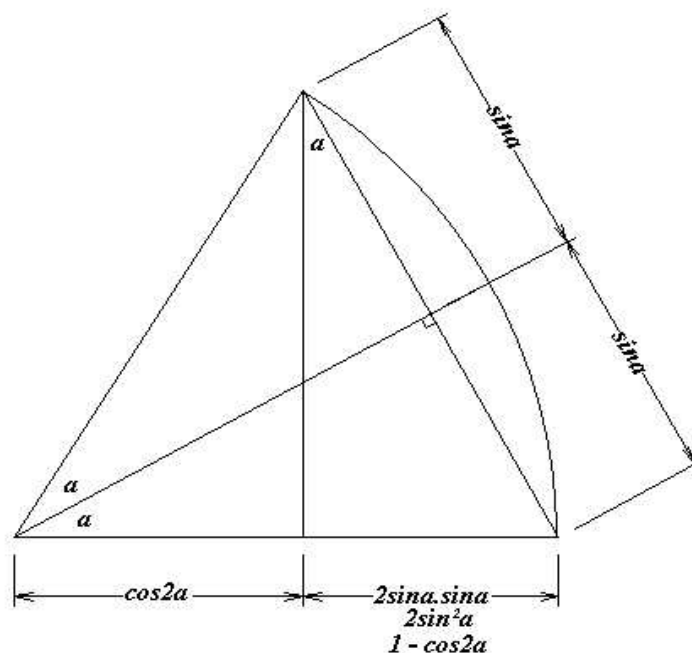
Le planimètres polaires procèdent de la même manière en partant du principe que les mouvements du bras du curseur s'annulent car ce dernier doit revenir au point de départ...

**Les Intégrateurs** donnent directement la valeur des moments des surfaces par rapport à un « axe zéro ».

Le principe est de faire tourner la molette d'un angle non pas de  $\alpha$  mais de  $2 \times \alpha$  par un système d'engrenages multiplicateurs.

On oriente la molette à  $90^\circ$  de celle du planimètre et on utilise les relations des lignes trigonométriques.

Ci-dessous la représentation géométrique de ces relations pour des angles  $a$  et  $2a$  :



Pour un rayon = 1 :

$$1 - \cos 2a = 2 \times \sin^2 a$$

Nous avons maintenant un petit problème géométrique-

que à méditer, Le moment d'une surface par rapport à

un axe étant égal à  $\int_{x1}^{x2} \frac{y^2}{2} . dx$

Le fait de sommer tous les  $1 - \cos 2a$  sur les ordonnées (y) par rapport à un axe de référence revient à intégrer tous les  $2 \times \sin^2 a$  puisqu'il y a égalité entre les deux.

Voilà quelques principes de fonctionnement de ces outils merveilleux qui ont été remplacés par le calcul des aires d'après les relevés de cotes.

(Moment / surface = position du CG de la surface)...

### **Calculs des aires**

La méthode la plus utilisée était sans doute celle de Simpson :

$$S = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

« e » étant la mesure constante de chaque intervalle.

La méthode oblige à diviser la surface en nombre impair de bornes régulièrement espacées, de 0 à 10 par exemple comme dans la formule ci-dessus. Je n'insisterai pas pour développer ces théories.

Maintenant les logiciels de dessin donnent les valeurs des surfaces, moments et inerties d'un seul clic de souris.....

\*

**La courbe de stabilité** était abordée de manière presque empirique à l'époque où tout se concevait à la main. Les courbes devaient être présentées à l'inspection des Affaires Maritimes pour obtenir

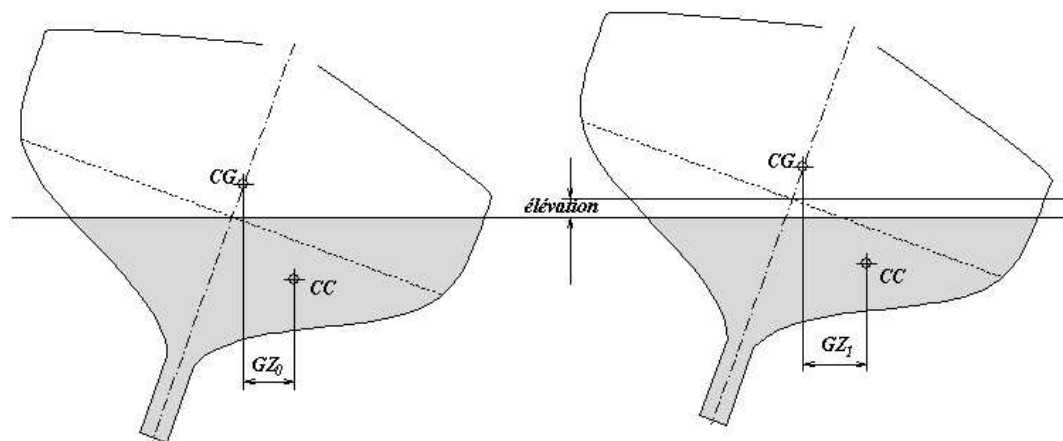
l'homologation des plans. Certains confrères se contentaient de tracer une courbe « au jugé » sans effectuer le moindre calcul et le tour était joué. Tout cela relevait de l'art de l'estime par expérience et par la connaissance des navires précédents ayant existé.

Le 10 août 1628 le « Wasa » entama son voyage inaugural et coula quasiment à la sortie du port par manque de stabilité... ce qui fut probablement le signal de départ concernant les calculs de stabilité ! Enfin, j'aime à le croire ! Mais avant de pouvoir bénéficier de l'aide des ordinateurs, il aura fallu attendre longtemps.

Comment procédait-on ?

La courbe de stabilité se calcule pour chaque angle de gîte, de 0 à 180°. Ce qui représente un travail considérable. On se contentait donc de calculer les couples de redressements pour tous les 10° de gîte, voir seulement pour 20 et 30°, enfin chacun s'arrangeait comme il pensait bien faire.

Exemple pour 20° de gîte :



Le croquis de gauche représente la carène simplement gîtée.

La compilation des surfaces immergées de tous les

couples donne le volume total.

Le CG de tous les couples donne le bras de levier général  $GZ$ , distance horizontale entre le CG et le CC, laquelle multipliée par le poids du navire, donne le couple de redressement général à cet angle de gîte.

Naturellement le calcul du volume de la carène gîtée ne correspondait pas au poids du navire. Il était donc nécessaire de refaire tous les calculs avec la carène inclinée au même angle de gîte mais rehaussée d'une valeur estimative.

Les nouveaux calculs ne donnaient toujours pas le volume recherché mais on se contentait d'effectuer une interpolation linéaire avec les deux résultats... Voilà un aperçu du travail que cela représentait et qui était assez peu précis car l'assiette de la carène ne reste pas à zéro à la gîte. L'avant du navire a tendance à s'enfoncer car il est moins large que l'arrière, en général. À chaque angle de gîte le centre de carène se déplace vers l'arrière. On n'en tenait pas compte pour des raisons évidentes qui mèneraient à des calculs sans fin.

Des méthodes assez expéditives étaient pratiquées pour gagner du temps. Par exemple, l'architecte découpait soigneusement tous les couples immergés dans du papier bristol. Il replaçait les couples à leur place les uns sur les autres et cherchait ensuite où se trouvait le CG du paquet au complet en le positionnant de différentes manières en équilibre sur une lame de rasoir.... La méthode en valait bien une autre toute aussi imprécise.

Avec les ordinateurs, ces questions sont dorénavant



résolues en quelques minutes pour tous les angles de gîtes et toutes les assiettes.

Le principe utilisé en 3 dimensions est le suivant :

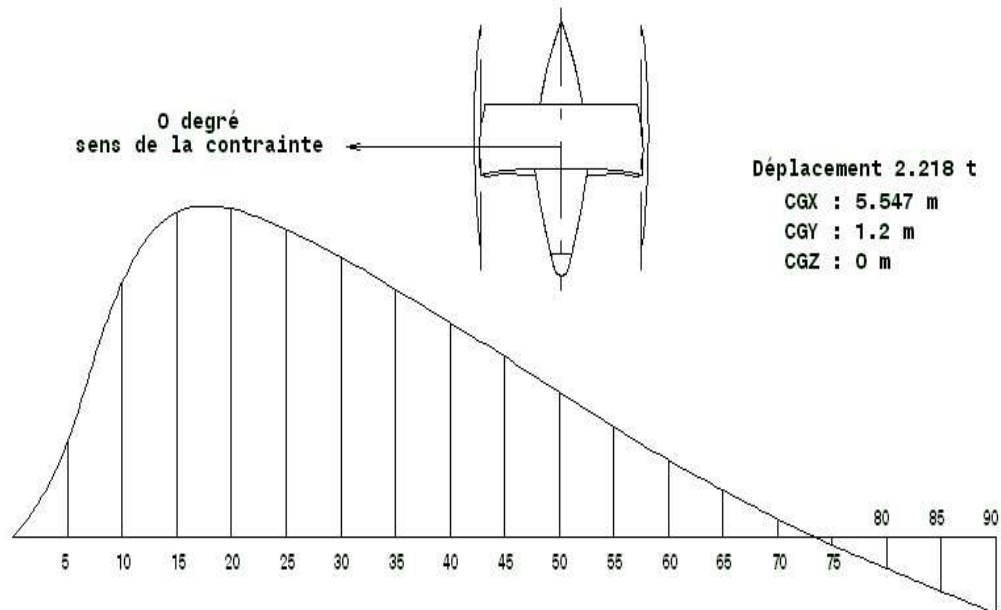
Pour chaque angle de gîte de 0 à 180° on cherche la position de la carène qui donne le bon volume en faisant varier l'élévation et l'assiette, les deux en même temps. Lorsque le déplacement est trouvé et que le CG du navire se situe bien au-dessus du CC, on mesure le décalage latéral entre le CC et le CG puis on reporte cette valeur sur la courbe de stabilité et ainsi de suite pour tous les angles de gîte.

On pourrait penser que ces méthodes sont parfaites mais ce n'est pas exactement le cas surtout avec les multicoques : les forces de redressement à considérer ne sont pas obligatoirement orientées exactement par le travers ! par exemple au grand large, la poussée vélique sera orientée plus vers l'avant que par le travers.

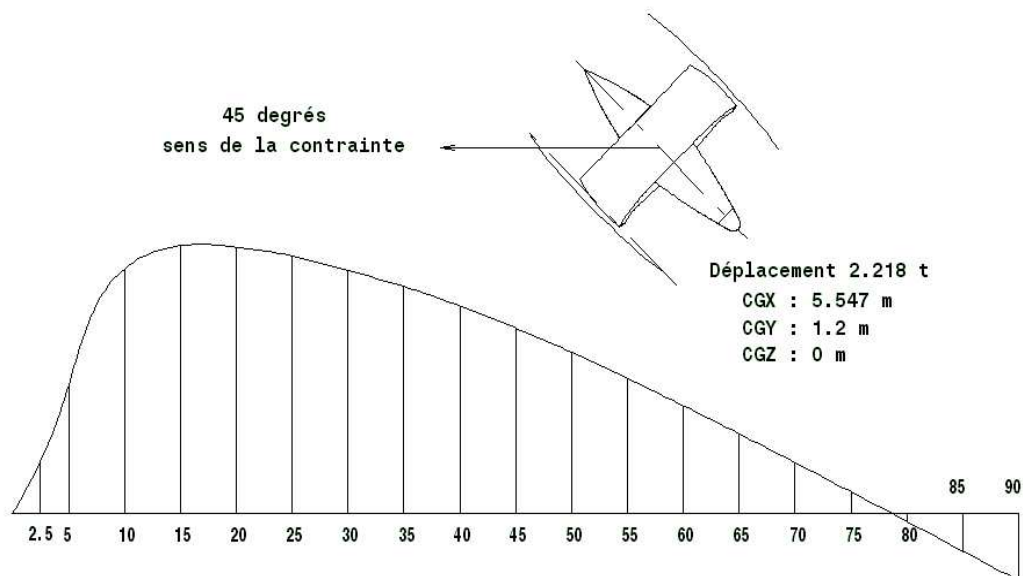
On doit le savoir entre autres pour le calcul des bras de liaisons des coques. Toutes ces approches sont aujourd'hui possibles avec beaucoup de précision.

Voilà ce que donne une courbe de stabilité du trimaran « Echo » de Newick :

Gîte	Assiette	Elevation	Levier	Moment
5	0,3926	0,0670	0,9298	2,0621
10	1,0321	0,1936	2,4628	5,4622
15	3,5759	0,3176	3,1420	6,9686
20	7,0242	0,4846	3,1734	7,0381
25	10,6236	0,6610	2,9714	6,5901
30	14,1946	0,8355	2,7062	6,0020
35	17,6358	0,9918	2,3948	5,3114
40	21,1836	1,1325	2,0727	4,5971
45	24,4817	1,2489	1,7447	3,8695
50	27,9775	1,3501	1,3969	3,0982
55	31,1454	1,4240	1,0617	2,3546
60	34,0933	1,4844	0,7453	1,653
65	38,8377	1,5458	0,1775	0,3936
75	40,3989	1,5478	-0,0757	-0,1679
80	41,2577	1,5299	-0,2990	-0,6631
85	42,1032	1,5129	-0,5225	-1,1588
90	42,1031	1,4744	-0,7337	-1,6273



Gîte	Assiette	Elevation	Levier	Moment
2,5	1,3261	0,0262	0,5682	1,2603
5	1,8046	0,0757	1,3914	3,0859
10	1,4092	0,2265	2,6677	5,9167
15	0,7600	0,3850	2,9188	6,4735
20	0,4714	0,5458	2,9037	6,4400
25	-0,0835	0,7141	2,8055	6,2223
30	-0,3880	0,8727	2,6485	5,8740
35	-0,4248	1,0294	2,4724	5,4834
40	-0,6685	1,1710	2,2577	5,0072
45	-0,9716	1,3054	2,0190	4,4779
50	-1,1886	1,4165	1,7543	3,8907
55	-1,8120	1,5159	1,4705	3,2613
60	-2,4176	1,5906	1,1710	2,5972
65	-2,9023	1,6496	0,8637	1,9156
70	-3,1100	1,6900	0,5508	1,2216
75	-4,1230	1,7154	0,2321	0,5148
80	-4,2242	1,7102	-0,0890	-0,1974
85	-5,1634	1,6840	-0,4143	-0,9189
90	-4,7016	1,6256	-0,7342	-1,6284



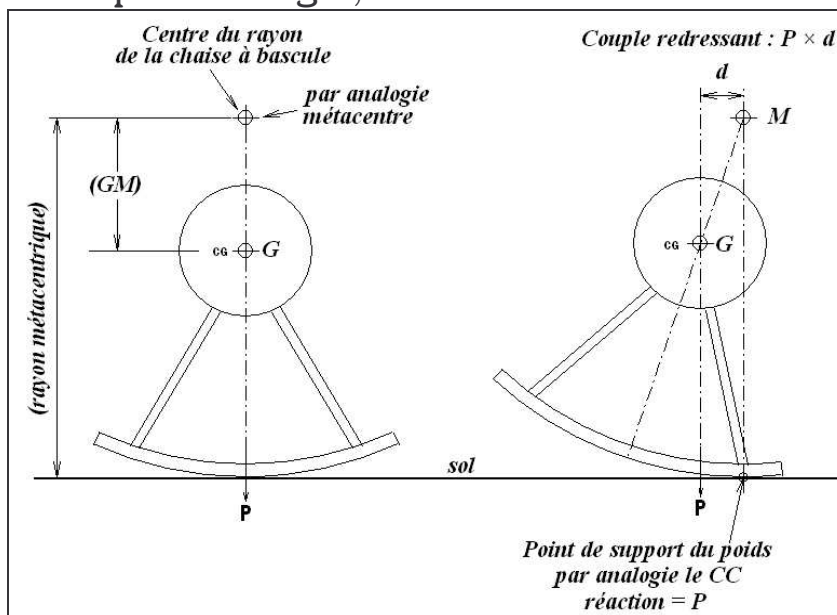
L'orientation à 45° présente moins de couple que par le plein travers.

## Détermination expérimentale du CG

En principe la position du centre de gravité général du navire est déterminée par le « devis de poids et centre de gravité » dans lequel tout est censé avoir été répertorié, de la quille à la pomme de mât... En principe. En réalité, le navire est construit avec des matériaux dont la masse volumique n'est pas toujours connue avec précision, surtout lorsque le navire est un prototype en bois, fibres et résine. Lorsque le navire est mis à l'eau, on constate de petits écarts surtout si le chargement n'est pas complet et que personne ne se trouve à bord. On vérifie donc la position du centre de gravité du navire en l'état par une petite expérience d'inclinaison. La connaissance exacte de la position du CG nous servira à calculer la courbe de stabilité du navire. Avant tout, voyons quelques notions d'équilibre statique des navires. Dans un premier temps on détermine la position du métacentre.

### Qu'est-ce que le Métacentre ?

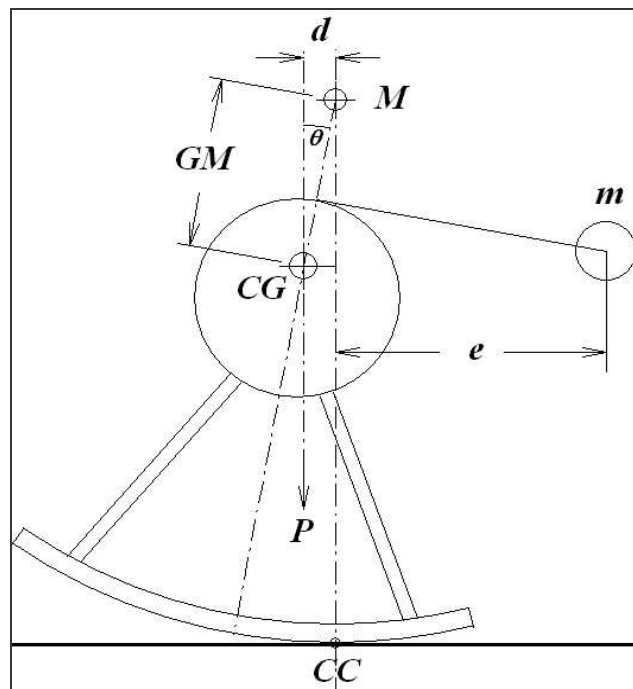
Imaginons par analogie, une chaise à bascule :



Nous connaissons le rayon des patins et donc automatiquement la position du centre de l'arc de cercle qui peut être assimilé au « métacentre  $M$  ».

Appliquons un couple au système, par exemple avec une masse «  $m$  » au bout du bras «  $e$  » mesuré par rapport à la verticale remontée du CC (par analogie, centre de carène). Le couple aura pour valeur :  $C = m \times e$  (Les masses  $P$  et  $m$  étant connues).

Le système est en équilibre dans cette position inclinée, cela implique que le centre de gravité général des masses  $P$  et  $m$  se situe exactement sur la verticale du CC. Cette dernière déduction ne nous permet pas de déduire la position verticale de CG de la chaise seule de masse  $P$ . En revanche nous savons que le système est soumis à un couple inclinant  $C = m \times e$  et par réaction le couple redressant sera exactement égal à  $P \times d = m \times e$



Par essence le « métacentre »  $M$  sera toujours situé sur la même verticale au dessus de CC, ce qui permet de

déduire  $d = \frac{C}{P}$  ou  $d = \frac{m \times e}{P}$  puis la position verticale

du CG de la chaise en fonction de celle du métacentre  $M$  et de celle du CC (centre de carène).

La position du métacentre est donnée par le « Rayon métacentrique »  $R$  que nous savons puisque, dans cet exemple, il s'agit du rayon des patins de la chaise à bascule.

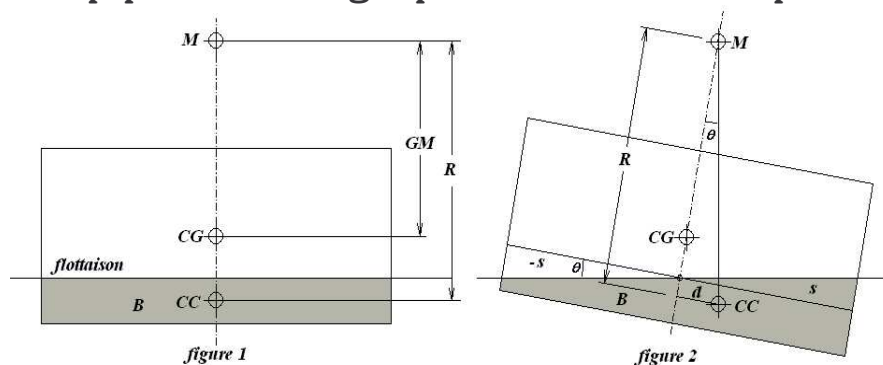
Connaissant «  $d$  » et l'angle de gîte, on déduit que

$GM = \frac{d}{\sin \theta}$ , qui est par analogie la « hauteur métacentrique ».

Finalement nous savons où se trouve le centre de gravité vertical de la chaise par rapport à la position du CC.

Les problèmes se présentent à peu près de la même manière pour les navires, à la différence que la position du métacentre n'est indiquée nulle part ; il faut la trouver à partir des caractéristiques géométriques de la carène. La position verticale du CC dépend du poids du navire. Un navire chargé s'enfonce dans l'eau et son centre de carène s'enfonce également.

Imaginons un bateau d'un poids  $P$  avec une forme de parallélépipède rectangle pour faciliter les explications.



Les figures ci-dessus représentent une section du bateau. La partie grisée est immergée ; disons que la valeur de son aire est  $B$  (en relation avec le poids du bateau). Dans notre exemple :

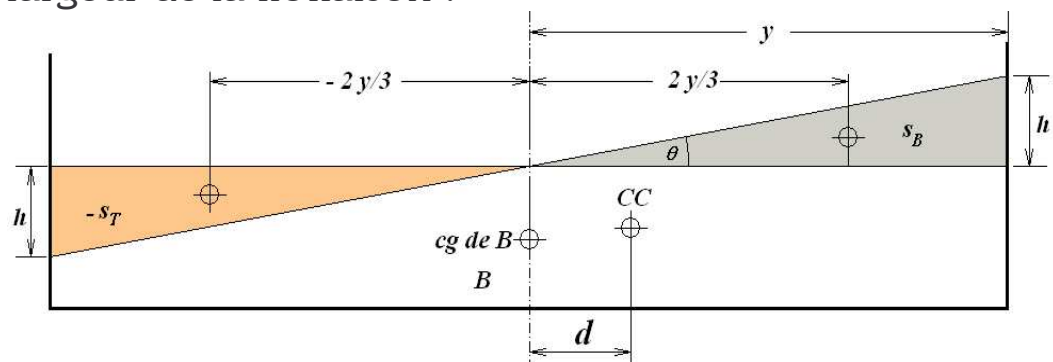
- $B$  est constant sur toute la longueur du navire.
- $CC$  est le centre de carène identique au centre de gravité de la surface  $B$ .

Cherchons où se situe le « métacentre »....

On fait gîter le navire comme dessiné sur la figure 2, d'un angle  $\theta$ .

Les triangles «  $s_T$  et  $s_B$  » sont de surfaces égales, en plus et en moins sur chaque bord. Ainsi l'aire «  $B$  » reste inchangée, ce qui est évident car le poids du bateau demeure le même avec le même volume immergé quelle que soit la gîte. Mais le centre carène  $CC$  s'est décalé de la valeur «  $d$  ».

Calculons la valeur de «  $d$  », avec «  $y$  » pour la demi-largeur de la flottaison :



Par rapport à l'axe central du navire, la somme des moments des surfaces individuelles divisée par la surface totale donnera la mesure «  $d$  », distance du  $CC$  décalé par rapport à l'axe de symétrie.

$$h = y \tan \theta$$

$$\text{Surface de } s_B = \frac{y \cdot h}{2} \Rightarrow s_B = \frac{y \times y \tan \theta}{2} = \frac{y^2 \tan \theta}{2}$$

$$\text{Surface de } s_T = -\frac{y \cdot h}{2} \Rightarrow s_T = -\frac{y^2 \tan \theta}{2}$$

Effectuons la somme des moments (ou couples) des surfaces par rapport à l'axe de symétrie :

Moment de  $B$  :  $B \times 0 = 0$  (la forme rectangulaire non gî-tée)

Moments des deux triangles « s » :

$$s_B \times \frac{2y}{3} = \frac{y^2 \tan \theta}{2} \times \frac{2y}{3} = \frac{y^3 \tan \theta}{3}$$

$$-s_T \times -\frac{2y}{3} = -\frac{y^2 \tan \theta}{2} \times -\frac{2y}{3} = \frac{y^3 \tan \theta}{3}$$

$$\text{Somme des moments : } m = \frac{2y^3 \tan \theta}{3}$$

La distance «  $d$  » du CC par rapport à l'axe de symétrie sera égale au moment  $m$  divisé par l'aire  $B$  :

$$d = \frac{m}{B} = \frac{2y^3 \tan \theta}{3B}$$

Ce qui permet de calculer la valeur du « rayon métacentrique »  $R$  : (figure 2)

$$R = \frac{d}{\tan \theta} \Rightarrow R = \frac{2y^3 \tan \theta}{3B \tan \theta} = \frac{2y^3}{3B}$$

On constate que le calcul du rayon métacentrique ne dépend pas de l'angle de gîte. En conséquence à la gîte 0 degré,  $R$  se calculera de la même manière puisque  $\tan \theta$  se trouve éliminé des équations.

Le rayon métacentrique est donc une caractéristique



de la carène comme elle est figurée avec sa surface de flottaison précise correspondant à un « déplacement » (volume immergé) précis. Il ne s'agit ici que d'une définition purement géométrique qui n'a rien à voir avec le centre gravité général de toutes les masses composant le navire.

Le métacentre ne bougera pas de sa position quelle que soit celle du CG pour le même poids.

Le but de ces opérations étant de connaître la position verticale du CG général du navire.

**La position du métacentre** sera donc déterminée par rapport à la position verticale du centre de carène CC et le rayon métacentrique  $R$  (figure 1).

Naturellement un bateau ne se résout pas en une section transversale. Que donne le volume total pour une longueur «  $l$  » de notre navire rectangulaire ?

$$R = \frac{2y^3l}{3Bl} = \frac{2y^3l}{3V}$$

avec  $V = B \times l$  : volume immergé.

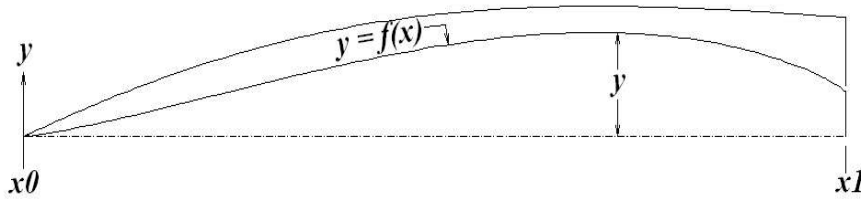
$\frac{2y^3l}{3}$  représente exactement l'inertie de la surface de

la flottaison du navire « rectangulaire », comme nous le verrons plus loin au chapitre « Moment d'inertie des surfaces.. »

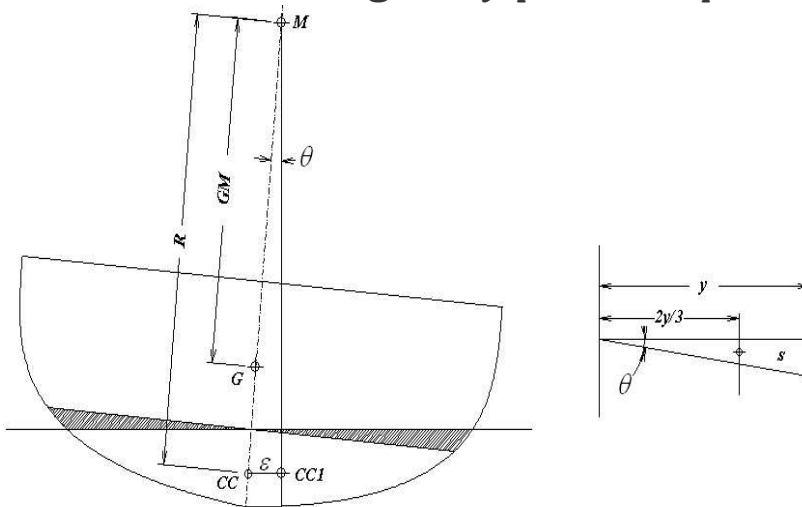
$$\text{soit } R = \frac{I_{\text{flottaison}} (\text{m}^4)}{V (\text{m}^3)}$$

Évidemment, notre navire n'est pas dessiné de cette manière rectangulaire, loin s'en faut, mais le raisonnement reste exactement le même pour tous les volumes immergés, quelles que soient leurs formes.

## Reprenons ces principes avec des formes



Supposons connue la fonction  $y = f(x)$  de la ligne de flottaison montrant les largeurs  $y$  pour chaque  $x$ .



et inclinons la carène d'un angle très petit «  $\theta$  ». À la distance «  $x$  », la largeur de la flottaison sera égale à «  $y$  » et comme précédemment la surface du triangle immergé ou émergé sera égal à  $\frac{y^2 \tan \theta}{2}$  et le moment

de cette surface par rapport à l'axe sera égal à :

$$\frac{y^2 \tan \theta}{2} \times \frac{2y}{3} \text{ soit } \frac{y^3 \tan \theta}{3}$$

le moment total «  $m$  » du « volume en coin » pour toute la longueur de la flottaison et pour les 2 bords sera :

$$m = \tan \theta \times 2 \int_0^{fl} \frac{y^3}{3} dx = \tan \theta \times \frac{2}{3} \int_0^{fl} y^3 dx$$

qui représente exactement le moment d'inertie «  $I$  » de toute la surface de la flottaison  $\times \tan \theta$ , bâbord + tribord. Donc  $m = I \times \tan \theta$

Le bras de levier «  $d$  » sera égal au moment  $m$  divisé par le volume immergé total du navire et puisque  $m$  est égal à l'inertie  $I$  de la flottaison multipliée par  $\tan \theta$  :

$$d = \frac{I \times \tan \theta}{V} \text{ et le rayon } R = \frac{d}{\tan \theta} \text{ ce qui implique que}$$

$$\text{le rayon métacentrique } R = \frac{I}{V}$$

La position du métacentre est une caractéristique importante du navire, elle permet de déduire sa stabilité en fonction de la position relative du CG général, et donne une idée de sa période de roulis (ou de tangage).

Notons que la définition mathématique du métacentre a été démontrée la première fois par **Pierre Bouguer** (1698-1758) dans son traité publié en 1746.

\*

CG est le centre de gravité de la masse du navire d'un poids  $P$ . L'action résultante de la force «  $P$  » est verticale dirigée vers le bas.

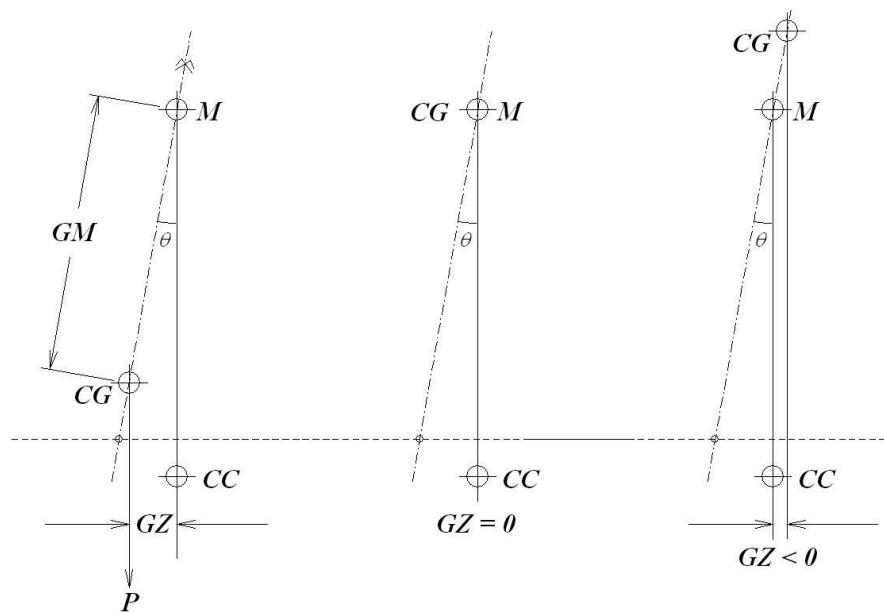
CC est le centre de poussée verticale selon le principe d'Archimède, son action est dirigée vers le haut.

Il en résulte donc un couple redressant  $Rm$  (*righting moment*) qui peut être évalué ainsi :  $Rm = P \times GZ$ , avec  $GZ$  le levier défini par l'écart horizontal entre le centre de gravité CG et le centre de carène CC. Le

navire soumis à ce couple se redressera pour trouver son équilibre statique.

Si le  $CG$  se situe sur de  $M$ , alors le navire est dit de stabilité indifférente et il reste comme on le place sur l'eau.

Si le  $CG$  se situe au dessus de  $M$ , alors le navire est instable et ne manquera pas de se retourner quille en l'air..



On utilise  $GM$  pour évaluer, entre autres, la période de roulis du navire selon cette formule théorique

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{masse}}{D \times GM}}$$

où  $T$  est la période en secondes,  $I_{masse}$

est l'inertie transversale du navire entier avec les masses d'eau additionnelles remuées pendant le roulis,  $D$  est le volume ou le déplacement correspondant au poids du navire. Plus  $GM$  sera grand et plus le navire sera stable. Cette formule reste dans la théorie car il est impossible de connaître la valeur de l'inertie transversale de toutes les masses composant le navire par rapport au  $CG$  général et encore plus impossible de

connaître la valeur des masses d'eaux additionnelles. En revanche on peut mesurer avec précision la période de roulis pour en déduire ce qui peut l'être....

**Revenons à notre détermination** expérimentale de la position du CG.

On prend des mesures de l'assise du navire sur sa flottaison afin de déduire exactement la valeur «  $V$  » du volume immergé et donc du poids du navire par « pesée hydrostatique » :

$$P = V \times \text{densité de l'eau} .$$

Puis, on installe des masses  $m_1, m_2 \dots$  de part et d'autre du pont comme dessiné en notant bien leurs positions en  $xyz$ .

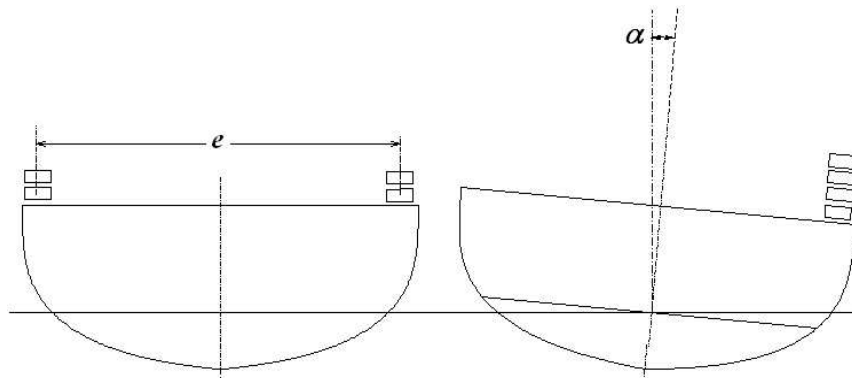
Le poids total  $P + \sum m_i$  donne un nouveau volume immergé avec une position verticale du CC qu'il faudra retenir, car il s'agit du « pivot » de ce qui va suivre.

A l'aide du plan des formes du navire, on détermine la position verticale exacte du CC correspondant au total

$P + \sum m_i$  . On calcule également le moment d'inertie

$I_{flottaison}$  de la surface de la flottaison dans ces conditions, ce qui servira plus loin dans le raisonnement qui nous occupe.

Enfin on déplace les masses  $m_i$  une par une d'un bord sur l'autre de la distance «  $e$  », comme figuré ci-dessus, et on note avec précision les angles de gîte et le moment  $m_i \times e$  généré par le déplacement de chaque masse.



Des inclinomètres électroniques très précis existent sur le marché. L'expérience doit s'effectuer pour de petits angles «  $\alpha$  » de l'ordre de 1 à 3° pour éviter les erreurs dues à la dissymétrie de forme de la carène inclinée.

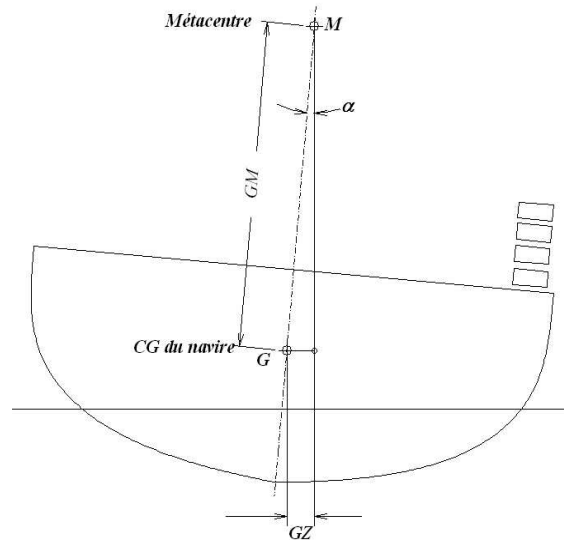
Les résultats obtenus sont lissés par régression linéaire. L'expérience permet de connaître le moment inclinant  $Mt$  déduit du lissage correspondant à un angle de gîte  $\alpha$  donné, par exemple à 1° de gîte.

Le bateau reste donc en équilibre à cet angle de gîte précis, c'est-à-dire que la carène oppose un couple de redressement  $Mt$  exactement équivalent au couple inclinant, comme le montre l'analogie avec la chaise à bascule ci-dessus. Un moment redressant est le produit d'une force - le poids du navire - par une distance, - le bras de levier redressant «  $GZ$  » - qui peut se calculer de cette manière :

$$GZ = \frac{Mt}{P}$$
 avec  $P =$  poids du bateau sans les masses additionnelles.

La hauteur métacentrique  $GM$  peut être connue à ce

stade : 
$$GM = \frac{GZ}{\sin \alpha}$$



Puisque nous avons déterminé la position de «  $M$  »

grâce à  $R = \frac{I_{flottaison} (m^4)}{V(m^3)}$ , (avec  $I$  et  $V$  correspondant à

$P_T = P + \sum m_i$ ) La position de  $M$  moins la hauteur métacentrique  $GM$  donnera la position du centre de gravité verticale du navire. La boucle est bouclée...

La position du  $CG$  obtenue expérimentalement de cette manière doit maintenant être corrigée car les masses  $m_i$  installées sur le pont sont à retirer par le calcul.

Verticalement :

- Déplacement du bateau avec les poids en kg :  $P_T$  avec son  $CGV_p$  comme on vient de le déduire (vertical)

- Déplacement des masses  $m_i$  en kg avec la position de leur  $CGV_m$

Calcul des moments verticaux :

$$P_T \times CGV_p = M_p \quad \text{et} \quad \sum m_i \times CGV_{mi} = M_m$$

Soustraction des masses :  $P_T - \sum m_i = P_{final}$

Soustraction des moments :  $M_P - M_m = M_{final}$

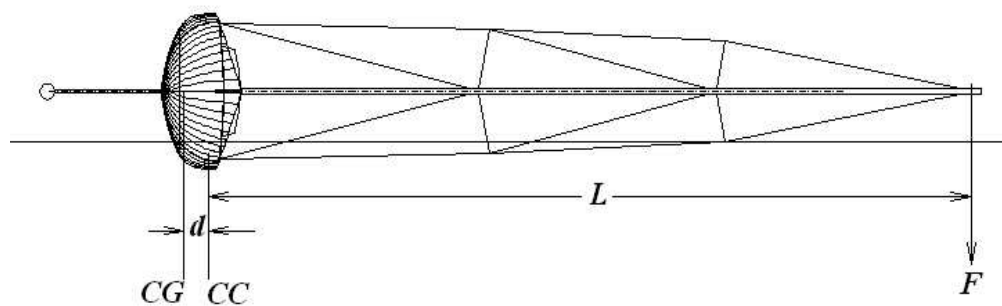
CG vertical résultant :  $\frac{M_{final}}{P_{final}}$

On effectue les mêmes calculs pour obtenir la position longitudinale du CG final.

Puis on ajoute de la même manière le chargement total du navire en état de naviguer.

\*

**Il existe d'autres méthodes** quand elles sont possibles, par exemple celle-ci :



On incline le navire à 90° de gîte à l'aide d'une force  $F$ , appliquée en tête de mât en un point de position connue. La force  $F$  est mesurée à l'aide d'un dynamomètre. Pour se faire une idée, un voilier comme « Étoile Horizon » (15,30 m de long) opposait une force de 430 kgf en tête de mât à 20 mètres au-dessus du pont lors de cette expérimentation.

Enfin on prend des mesures précises de la coque telle qu'elle est posée sur l'eau, ce qui permet de déterminer la position de son centre de carène  $CC$  qui servira de « pivot » à notre « balance romaine ». On doit disposer des formes du navire en 3 dimensions pour effectuer ces calculs.

Le couple est donc :  $C = F \times L$  contrebalancé également par :  $C = P \times d$



avec  $d$  : position recherchée du CG par rapport au « pivot », c'est-à-dire le CC de la carène inclinée.

On déduit «  $d$  » de cette manière :  $d = \frac{C}{P}$

Ce qui donne la position du CG par rapport au centre de carène  $CC$  tel que sa position a été définie pour l'expérimentation.

La même démarche peut être réalisée avec des angles de gîte divers. Il suffit d'effectuer les corrections pour la gîte.



## « Matmut »

le bateau de Jean-Luc Van Den Heede

C'était avant le départ de cette incroyable aventure : revivre les exploits de la « Golden Globe Challenge » de 1968, avec les mêmes bateaux de l'époque et dans les mêmes conditions, sans aucune aide de l'informatique.

Jean-Luc, en cherchant le bateau idéal, trouva le fameux « Rustler 36 » (11 mètres), voilier en polyester extrêmement robuste et répondant aux règlements de la course.

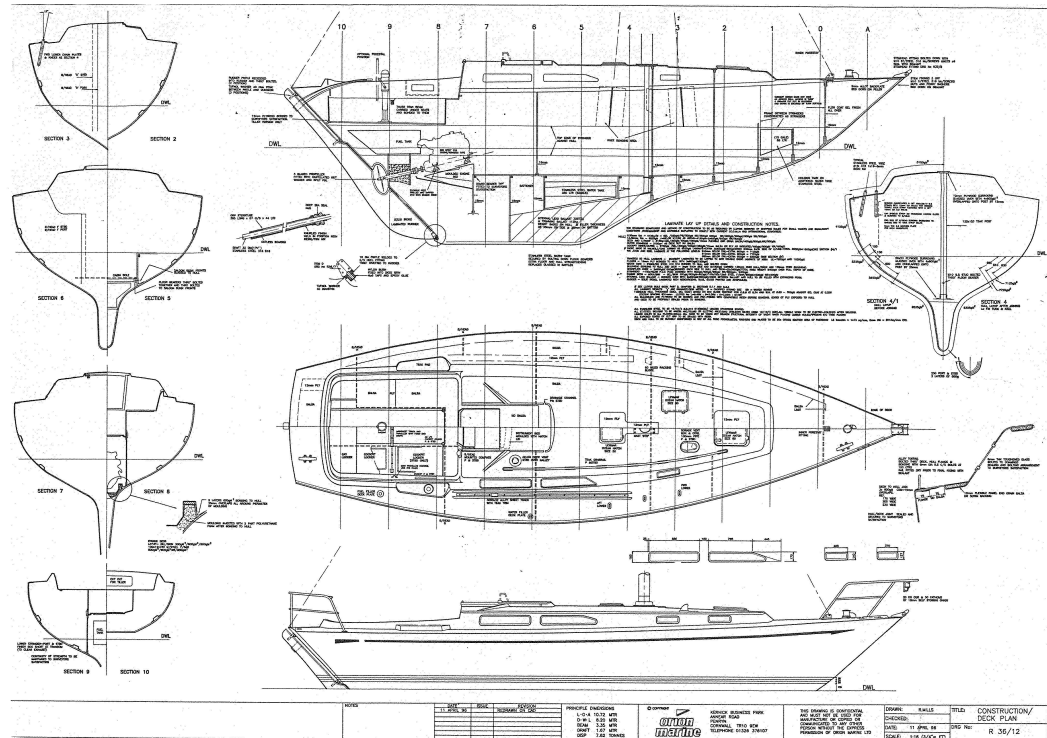
Je suis de cette époque où le monde de la voile était en effervescence puisque j'avais 20 ans en 1967. Je comprends donc fort bien cette nostalgie qui invite à un petit retour en arrière vers une certaine approche de la mer assez différente de ce qu'elle est devenue, sans pour autant critiquer quoi que ce soit. Des souvenirs me reviennent, de ceux qui m'ont définitivement donné la passion pour la mer et de tous les navires qu'elle porte et portera.

Le 11 août 2017 j'écrivis à Jean-Luc : « Si tu as un plan des formes à me passer de ton bateau, je pourrais avec plaisir m'amuser à effectuer des calculs de stab en long, en large et en travers, je suis bien outillé pour cela avec la définition des angles critiques etc. C'est une manière de mieux connaître son bateau car on ne le changera pas ! Bien connaître son bateau c'est essentiel.. »

Jean-Luc me fit parvenir les documents en sa possession dont celui ci-dessous. On peut déjà lire que le lest pèse 3287 kg plus 113 kg de « trimming ballast » soit

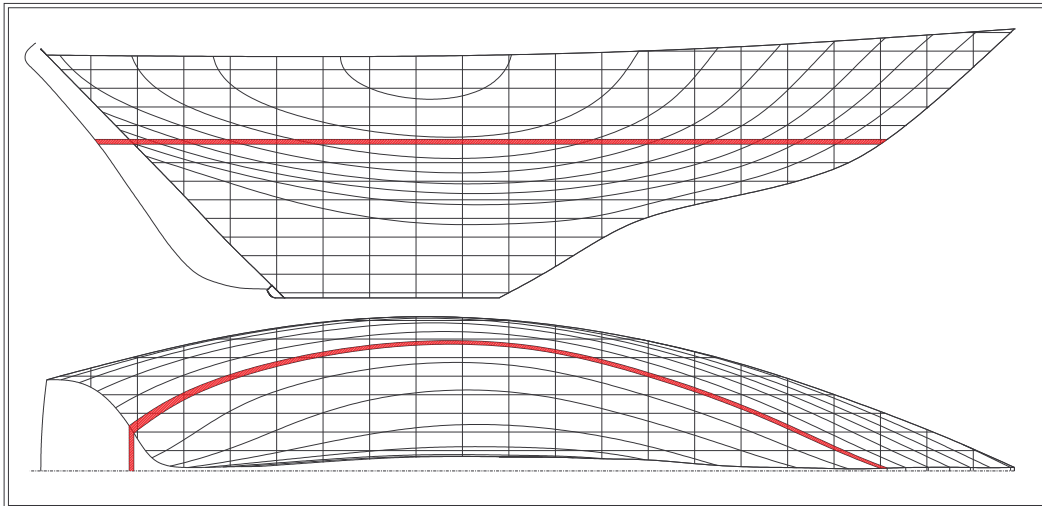
3400 kg au total.

Le déplacement précisé est de 7,62 tonnes, ce qui donne un rapport de lest est de 44,6%... Pas très loin des 50% !



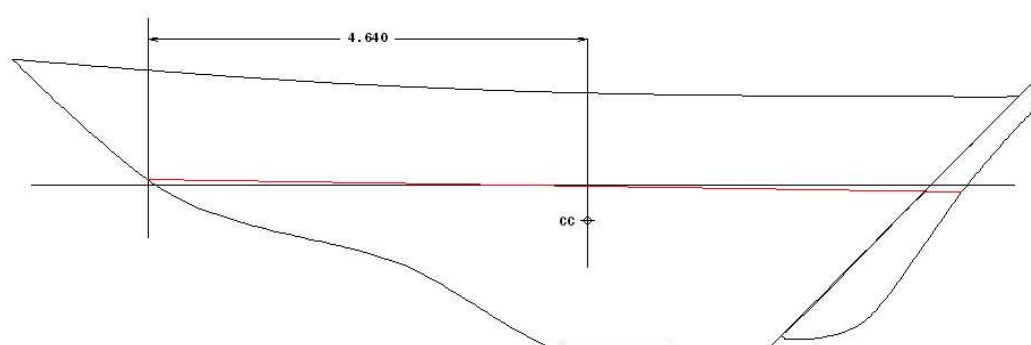
Je n'avais pas de plan de forme, je me suis donc évertué à le reconstituer en 3D à partir des éléments de cette planche très succincte de ce point de vue.

Le résultat n'est pas garanti à 100% mais assez fiable pour effectuer quelques calculs de stabilité.



Naturellement, ce bateau ne sera jamais très rapide car il est très lourd pour sa longueur de flottaison de 8,20 mètres. La rapidité n'était pas le but recherché pour affronter les 40<sup>ème</sup> avec un si petit bateau, non, le but recherché restait la fiabilité et une forte stabilité, assez forte pour ne pas rester sur le toit le cas échéant ! D'où ma proposition de calcul.

Jean-Luc prit quelques mesures de franc bord afin d'effectuer une « pesée hydrostatique » qui consiste à positionner le modèle 3D tel qu'il se présentait dans la réalité avec son chargement en l'état, puis de noter le déplacement.



Ce qui permet de connaître le poids du bateau : 7,635 t en l'état, presque exactement le déplacement

annoncé sur les plans à 15 kg près !

Le modèle 3D permet de connaître :

- l'inertie de la surface de la flottaison :  $7,2467 \text{ m}^4$

- Le déplacement « dans son jus » :  $7,4478 \text{ m}^3$

- la position verticale du centre de carène :  $-0,377 \text{ m}$

De ces données, on déduit la valeur du rayon métacentrique :  $7,2467 \text{ m}^4 / 7,4478 \text{ m}^3 = 0,973 \text{ m}$

Puisque le centre de carène CC se trouve à  $-0,377 \text{ m}$  sous la flottaison, il vient que le métacentre se situe à :  $0,973 - 0,377 = \underline{0,596 \text{ m}}$  au-dessus de la flottaison.

Puis Jean-Luc plaça sur le passavant une masse de  $220 \text{ kg}$  située à  $1,40 \text{ m}$  de l'axe du navire et nota les différences des mesures de franc-bord, ce qui permit de relever un angle de gîte de  $3,0046$  degrés.

Le couple inclinant était donc de :

$220 \text{ kg} \times 1,40 \text{ m} = 308 \text{ kg.m}$  ou  $0,308 \text{ t.m}$

Poids du bateau  $7,635 \text{ t} + 0,22 \text{ t} = 7,855 \text{ t}$

Déplacement latéral du centre de carène :

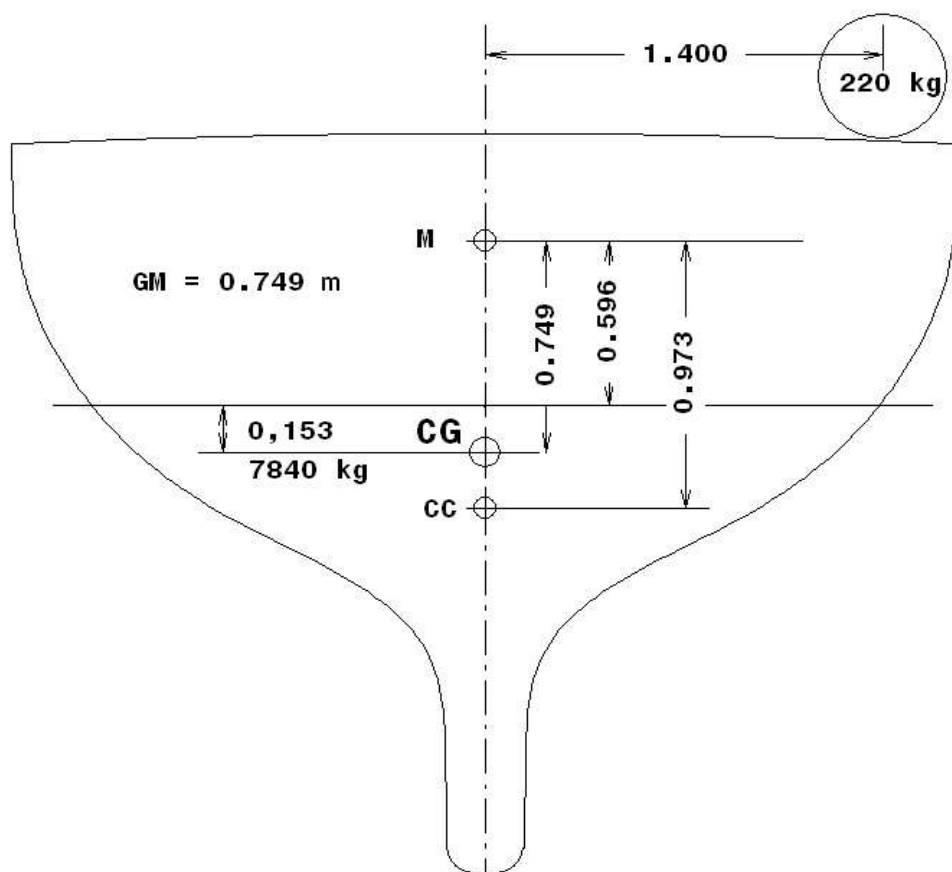
$0,308 / 7,855 = 0,0393 \text{ m}$

Hauteur métacentrique :

$0,0393 / \sin 3,0046^\circ = \underline{0,749 \text{ m}}$ .

Le métacentre se trouvant à  $0,596 \text{ m}$  au-dessus de la flottaison, cela permet de déduire la position du CG du navire :

$0,749 - 0,596 = \underline{0,153 \text{ m sous la flottaison}}$ .

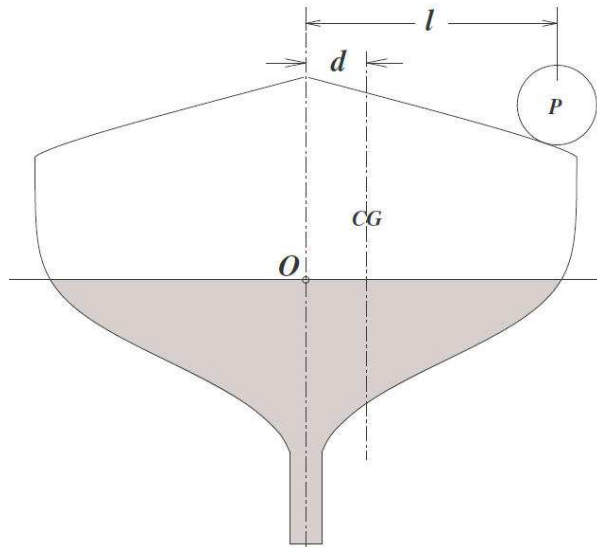


Maintenant nous devons soustraire la masse de 220 kg assise sur le passavant à une hauteur de 0,97 m au-dessus de la flottaison :

Eléments	Poids	LCG	VCG
Poids total du bateau avec le poids sur le passavant	7855,000	4,64	-0,153
poids sur le passavant	-220,000	4,64	0,97
<b>TOTAL</b>	<b>7635,000</b>	<b>4,64</b>	<b>-0,185</b>

Le CG se trouve donc à présent à  $-0,185$  m sous la flottaison.

**Il existe une autre manière** de trouver la position du CG général du navire en utilisant la puissance de calcul des ordinateurs.



On commence par effectuer une « pesée hydrostatique », c'est-à-dire de mesurer les hauteurs de franc-bord afin de déterminer la position exacte de la flottaison. Cela nous permet de calculer le volume immergé multiplié par 1,025 en eau de mer = le poids du navire en kg. Ici 7625 kg.

Ensuite on place une masse sur le pont à une distance connue «  $l$  », ici 220 kg.

Ce qui permet de calculer sur plan le décalage du centre de gravité de l'ensemble navire + masse.

Poids	distance	moment
7625	0	0
220	1,400	308
<hr/>		
7845	0,0392	308

Le CG général du navire + masse est donc décalé de «  $d$  » = 0,0392 m. Il se situe sur la verticale

comme dessiné, mais sa position en hauteur n'est pas connue.

C'est ce que nous recherchons.

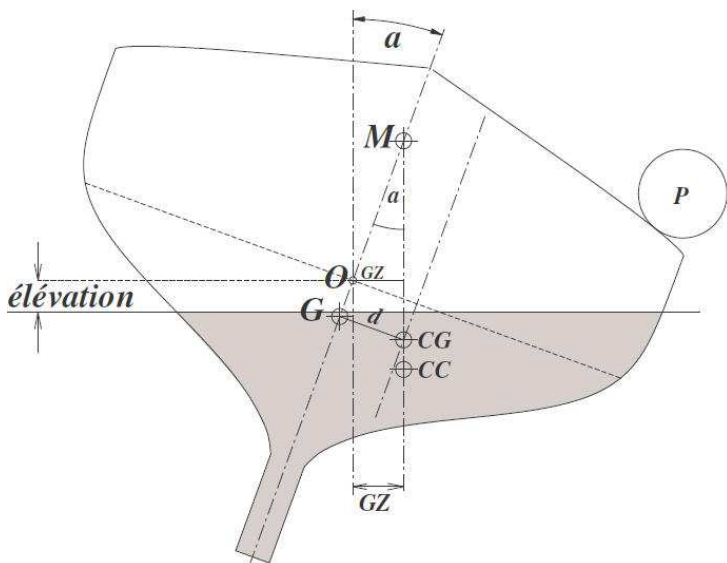
Maintenant laissons la carène prendre son équilibre et relevons précisément l'angle de gîte en utilisant un inclinomètre électronique.



Le centre de carène  $CC$  se situera forcément sous le  $CG$  sur la même verticale  $CC - CG - M$  comme illustré ci-dessous.

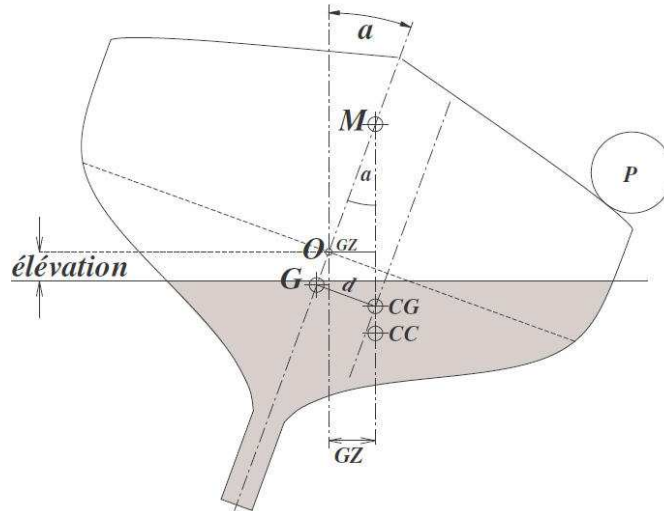
On fait mouliner l'ordinateur avec le décalage du  $CG$  et l'angle de gîte relevé sur l'inclinomètre. Il donne l'élévation et la mesure de  $GZ$  compté horizontalement à partir de «  $O$  », sans qu'il soit nécessaire de recourir au calcul de l'inertie de la flottaison. Ici  $GZ = 0,03127$  m

$M$  sera le métacentre pour l'angle de gîte «  $a$  », la mesure  $OM$  se calcule ainsi :  $\frac{GZ}{\sin(a)}$ .





L'angle «  $a$  » relevé est de  $3,0046^\circ$ ,  $OM$  sera donc égal à  $0,5966$



m.

Ensuite calcul de  $GM$  :  $\frac{d}{\tan(a)}$  soit  $0,7469$  m.

On déduit donc que le  $CG$  se situe à :  $0,7469 - 0,5966 = 0,1502$  m sous la flottaison.

On prendra soin d'effectuer ces opérations sur les deux bords du navire et de prendre la moyenne.

Cette méthode est valable même pour des angles de gîte importants car il n'y a pas lieu de considérer l'asymétrie de la surface de la flottaison lors de la gîte.

Ensuite on relocalise le  $VCG$  en retirant par le calcul la masse de  $220$  kg comme précédemment en sens inverse pour les mesures verticales.

Poids	distance V	moment V
7845	- 0,1502	- 1178,3
-220	0,92	- 239,1
<hr/>		
7625	- 0,1859	- 1417,4

Cette carène ancienne se présente avec un méta-

centre peu élevé mais un CG remarquablement bas sous la flottaison.

Connaissant la position du CG général, j'ai tracé une courbe de stabilité du bateau dans l'état de son chargement. Jean-Luc apprécia la manière de répartir les masses à bord dans la mesure du possible.

La courbe (page suivante) montre une faible stabilité initiale et un angle de chavirement probablement au-delà de 140° avec le roof que je n'ai pas comptabilisé ici.

La forme de la carène avec un bouchain assez doux, voire quasi inexistant explique la faible stabilité initiale, ce que Jean-Luc a constaté car son bateau « se vautre assez vite ». Le lest demande donc un certain angle de gîte pour commencer à être efficace. Ce type de carène se rapproche de celui des anciens « couloirs lestés » avec peu de stabilité de forme.

La carène ne « monte pas sur son bouchain » à la gîte, ou assez peu, ce qui signifie que le passavant passe assez facilement sous l'eau. Le très gros avantage se tient dans la quasi absence de stabilité négative lorsque le bateau est retourné ; ce qui veut dire qu'il ne risque pas de rester sur le dos, c'est impossible !

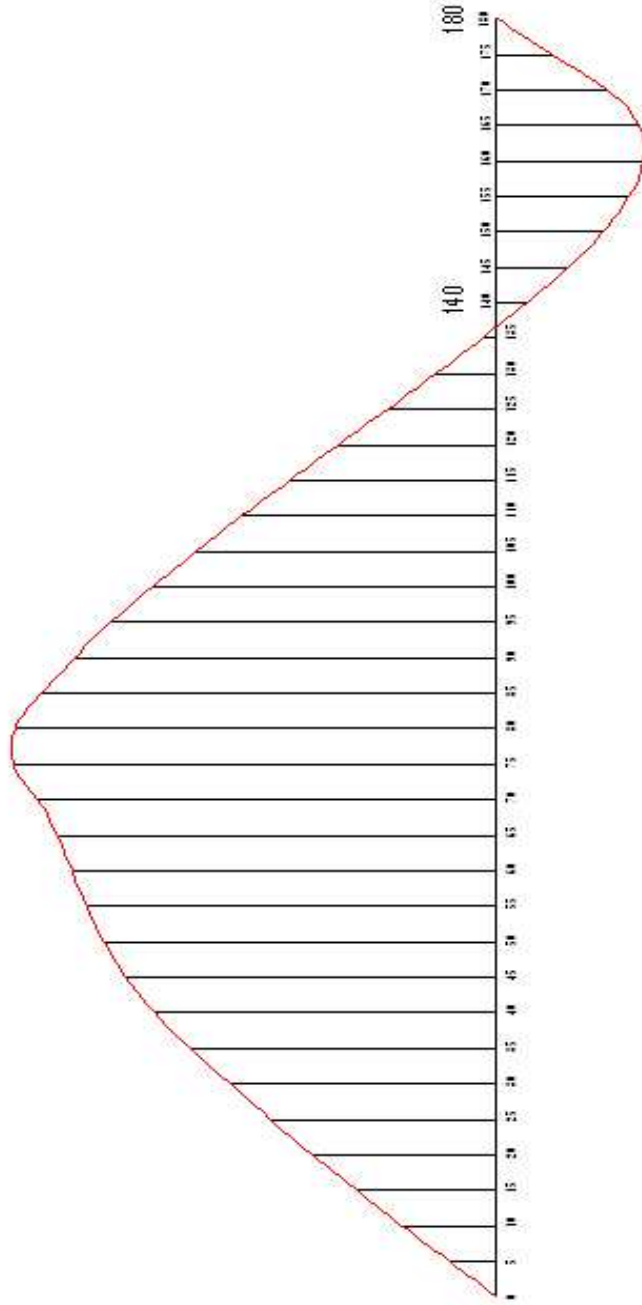
Jean-Luc a été rasséréiné de voir cette courbe. Il est parti pour son long voyage avec une certaine sérénité.

Sa victoire pour cette première Golden Globe Race est remarquable à plus d'un titre, sachant qu'il s'est engagé dans ce challenge à plus de 70 ans.

Bravo Jean-Luc.

Displacement 7.62 t  
 L05 : 4.640 ■  
 V05 : -0.185 ■  
 T05 : 0.000 ■

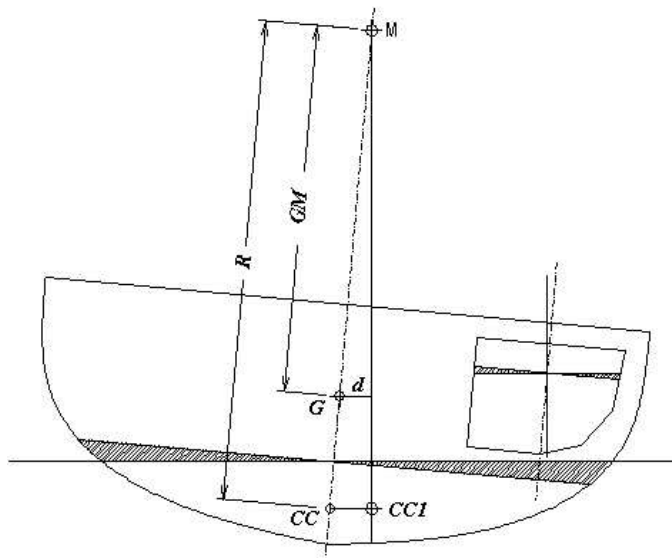
GITES	ELEVATIONS	LEVIERS	MOMENTS	dB (1/g)	LCB	
0	-0.0233	-0.0454	0.0000	0.0000	-3	4.431
5	0.0686	-0.0407	0.0702	0.5347	1	4.440
10	0.0686	-0.0271	0.1937	1.0548	-1	4.431
15	0.2621	-0.0040	0.2072	1.5788	4	4.441
20	0.4096	0.0266	0.2724	2.0759	3	4.440
25	0.5029	0.0655	0.3347	2.5504	3	4.440
30	0.8201	0.1115	0.3944	3.0056	2	4.440
35	1.0475	0.1638	0.4529	3.4509	2	4.440
40	1.2065	0.2192	0.5095	3.8930	1	4.432
45	1.4559	0.2743	0.5473	4.1704	-1	4.440
50	1.6274	0.3278	0.5800	4.4199	-1	4.440
55	1.7743	0.3780	0.6058	4.6159	-10	4.440
60	1.8924	0.4251	0.6275	4.7813	-3	4.440
65	1.9681	0.4654	0.6495	4.9489	-3	4.440
70	1.9368	0.5003	0.6785	5.1700	-2	4.434
75	1.8916	0.5278	0.7146	5.4455	-3	4.434
80	1.9484	0.5553	0.7121	5.4259	-3	4.440
85	1.8846	0.6132	0.6725	5.1247	-2	4.432
90	1.8276	0.6599	0.6244	4.7576	-2	4.431
95	1.7600	0.7053	0.5695	4.3395	-2	4.433
100	1.6600	0.7485	0.5092	3.8799	0	4.436
105	1.5600	0.7898	0.4446	3.3881	7	4.440
110	1.4108	0.8271	0.3757	2.8706	3	4.449
115	1.1899	0.8622	0.3056	2.3289	18	4.440
120	0.9733	0.8922	0.2342	1.7846	5	4.450
125	0.6756	0.9193	0.1612	1.2287	9	4.441
130	0.4913	0.9429	0.0900	0.6851	6	4.450
135	0.2008	0.9628	0.0200	0.1528	6	4.441
140	0.0110	0.9797	-0.0455	-0.3464	5	4.447
145	-0.2028	0.9936	-0.1056	-0.8045	7	4.446
150	-0.4006	1.0049	-0.1572	-1.1982	5	4.444
155	-0.5644	1.0147	-0.1956	-1.4983	3	4.441
160	-0.6644	1.0245	-0.2179	-1.6605	2	4.444
165	-0.7644	1.0357	-0.2315	-1.6115	0	4.433
170	-0.7364	1.0504	-0.1631	-1.2425	2	4.442
175	-0.7220	1.0596	-0.0820	-0.6246	3	4.443



## Les carènes liquides

ont une grande influence sur la stabilité des navires. Il s'agit des réservoirs, des cuves à gasoil, et de tous les liquides en général embarqués à bord.

Ci-dessous, un réservoir de gasoil est installé comme dessiné (en exagérant la dimension de la surface libre du liquide) :



À la gîte  $\theta$ , le liquide libre dans le réservoir procure un couple inclinant exactement en fonction de l'inertie de sa surface libre  $\times \tan \theta \times$  par la densité du liquide, soit 0,8 pour le gasoil.

Le raisonnement est le même que celui explicité pour l'inertie de la surface de la flottaison,  $Mt = I_{fl} \times \tan \theta$ , le même mais exactement en sens inverse, car le couple de redressement est devenu un couple inclinant pour les carènes liquides. Quelle que soit la position du réservoir dans le bateau, le couple inclinant généré par le déplacement du liquide sera appliqué à l'ensemble du navire.

On connaît toujours  $V$ , le volume immergé de la ca-

rène, par pesée hydrostatique.

le couple redressant  $Mt = I_{fl} \times \tan \theta$  doit être réduit d'une valeur du couple inclinant généré par les carènes liquides :

$$Mt = I_{fl} \times \tan \theta - I_{liquide} \times \tan \theta \times d$$

soit

$$Mt = \tan \theta (I_{fl} \times -I_{liquide} \times d)$$

Le calcul du rayon métacentrique devient :

$$R = \frac{I_{fl} \times -I_{liquide} \times d}{V}$$

Ce qui aura immédiatement une influence sur la position du métacentre et sur la stabilité du navire.

**Les forces dans le gréement d'un voilier** sont à calculer avec le couple de redressement maximum.

Le navire ne pourra pas opposer plus de force  $F$  résultant de son couple de redressement maximum quelles que soient les surfaces des voiles, contrairement à ce qui est souvent imaginé. On calculera donc les dimensions du mât, des haubans, des cadènes, etc, avec la force  $F$  répartie judicieusement. Par exemple si un navire présente un couple de redressement maximum de 5 tonnes.mètres et que la distance entre le centre de dérive et le haut du mât est de 20 mètres, alors la force maxi possible par le travers en tête de mât sera :

$$\frac{5}{20} = 0,25 \text{ t ou encore } 250 \text{ kgf et rien de plus.}$$

**La stabilité longitudinale** se calcule exactement de la même manière avec une courbe de stabilité en fonction des angles d'assiette. Le calcul du métacentre longitudinal donnera obligatoirement une position très

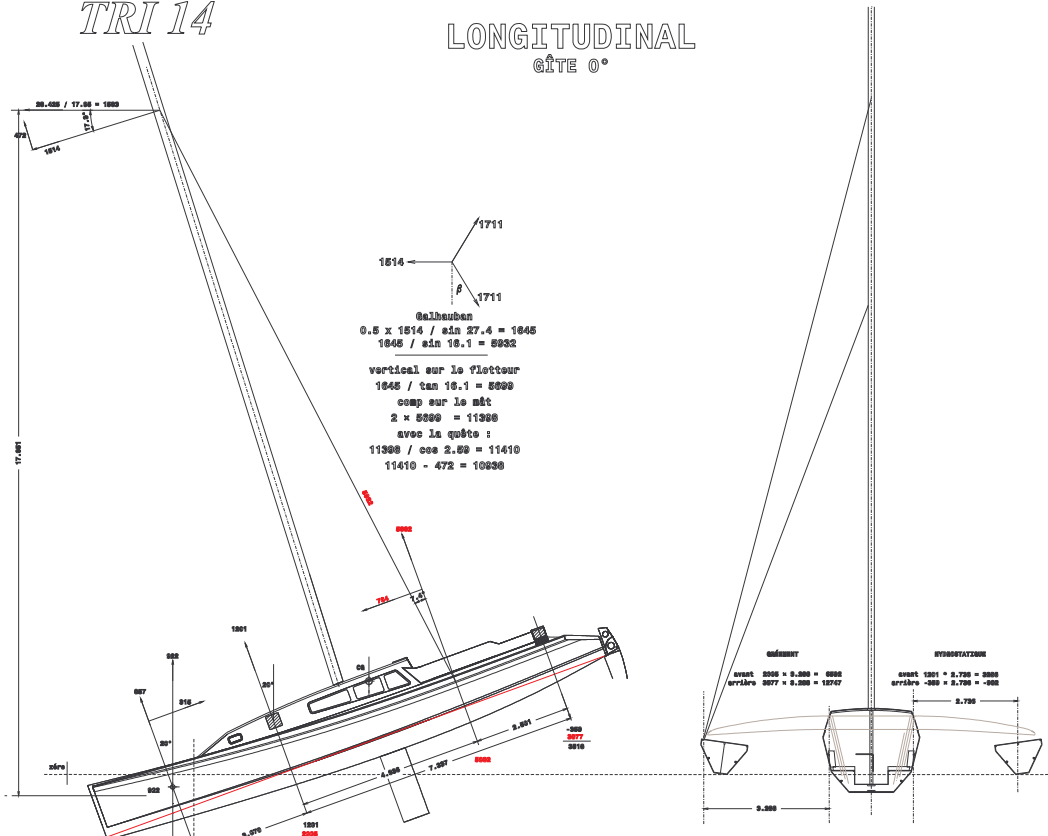
élevée mais sa position n'a pas grande importance puisqu'on connaît déjà la position du CG. On n'effectue pas toujours ces calculs pour un monocoque car les chiffres sont totalement hors de proportions avec ceux de la stabilité latérale. Pour ma part, je trouve qu'il est tout de même intéressant de connaître ce qu'un navire peut assumer au maximum dans le sens de sa longueur pour approcher plus précisément ce que deviennent les forces en jeu dans le gréement lorsque le navire progresse avec le vent venant de l'arrière et qu'il porte beaucoup de toile par grand vent.



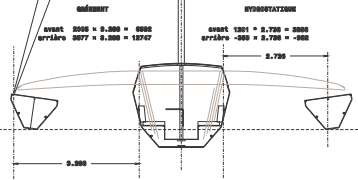
La question se pose surtout pour les multicoques qui peuvent porter beaucoup de toile sans pour autant présenter une très forte stabilité longitudinale comparée à celle des monocoques.

# TRI 14

## LONGITUDINAL GÎTE 0°



Calculated  
 $0.5 \times 1814 / \sin 27.4 = 1845$   
 $1845 / \sin 18.1 = 8090$   
 vertical sur le flottage  
 $1845 / \tan 18.1 = 8090$   
 coup sur le mâc  
 $2 = 8090 = 1598$   
 avec la quille  
 $11388 / \cos 2.58 = 11410$   
 $11410 - 472 = 10938$



Total des moments avant : 6882 + 6882 = 13764 kgf.m  
 Total des moments arrière : 15747 + 682 = 16429 kgf.m  
 Coût sur le bras avant avec L = 2.700 : 13764 / 2.700 = 5097 N  
 Coût sur le bras arrière avec L = 2.720 : 16429 / 2.720 = 6040 N

LCS général		Angle de gîte 0°										
Asc	Rep.Max	Orientation	U.F.1st	Brae.AV	Brae.AR	FAV	Subnat	F08	F.Steiz	U	U	U
0°	0,010	0,0°	2	2,700	2,720	16	40	8	0			
1°	0,000	0,0°	11	2,700	2,720	87	200	12	2			
2°	0,044	0,0°	80	2,701	2,720	400	1700	80	10			
3°	0,100	0,0°	134	2,707	2,720	1400	4000	204	24			
4°	0,160	0,0°	190	2,708	2,720	2801	8400	400	100			
5°	0,220	0,0°	251	2,701	2,720	4200	12400	600	200			
6°	0,271	0,0°	300	2,707	2,720	5600	16400	800	300			
7°	0,320	0,0°	350	2,700	2,720	7000	20400	1000	400			
8°	0,367	0,0°	400	2,700	2,720	8400	24400	1200	500			
9°	0,414	0,0°	450	2,706	2,720	9800	28400	1400	600			
10°	0,460	0,0°	500	2,701	2,720	11200	32400	1600	700			
11°	0,500	0,0°	550	2,700	2,720	12600	36400	1800	800			
12°	0,544	0,0°	600	2,707	2,720	14000	40400	2000	900			
13°	0,580	0,0°	650	2,700	2,720	15400	44400	2200	1000			
14°	0,610	0,0°	700	2,700	2,720	16800	48400	2400	1100			
15°	0,641	0,0°	750	2,706	2,720	18200	52400	2600	1200			
16°	0,670	0,0°	800	2,700	2,720	19600	56400	2800	1300			
17°	0,699	0,0°	850	2,700	2,720	21000	60400	3000	1400			
18°	0,728	0,0°	900	2,706	2,720	22400	64400	3200	1500			
19°	0,757	0,0°	950	2,700	2,720	23800	68400	3400	1600			
20°	0,786	0,0°	1000	2,700	2,720	25200	72400	3600	1700			

9 décembre 2016  
 Patrick Balta

## La stabilité des multicoques

...comme je l'ai laissé entendre déjà, ne se résume pas à une courbe de stabilité par le travers ou pour le longitudinal. Il convient de rechercher quel sera le couple maximum, et le couple minimum pour quel angle de gîte, quelle assiette et quelle orientation.

Exemple pour mon trimaran de 14 m « TRI14 »...

Ass : Assiette vers l'avant  
 Ass : Assiette vers l'avant  
 Levier : Bras de levier redressant  
 Mom.max : Couple de redressement Depl juste (t) x levier  
 Orientation : Angle depuis l'étrave de la position du LCB par rapport au LCG

**Moment maxi : 279006 N.m**  
**à la gîte : 0°**  
**à l'assiette : 21°**

### Angle de gîte 0°

Ass	m	kg	N.m	°
Levier	Déplacement	Mom.max	Orientation	
0°	0,300	6218	182	0,0°
1°	0,567	6213	34611	0,0°
2°	1,117	6223	68125	0,0°
3°	1,640	6220	100059	0,0°
4°	2,102	6218	128198	0,0°
5°	2,503	6219	152659	0,0°
6°	2,848	6219	173745	0,0°
7°	3,144	6219	191802	0,0°
8°	3,397	6219	207201	0,0°
9°	3,612	6219	220303	0,0°
10°	3,794	6220	231443	0,0°
11°	3,950	6220	240917	0,0°
12°	4,082	6220	248991	0,0°
13°	4,196	6220	255926	0,0°
14°	4,293	6220	261883	0,0°
15°	4,376	6220	266958	0,0°
16°	4,445	6219	271158	0,0°
17°	4,498	6219	274375	0,0°
18°	4,535	6219	276650	0,0°
19°	4,559	6219	278101	0,0°
20°	4,571	6218	278850	0,0°
21°	4,574	6218	279006	0,0°
22°	4,568	6218	278660	0,0° exit

### Angle de gîte 1°

Ass	m	kg	N.m	°
Levier	Déplacement	Mom.max	Orientation	
0°	0,460	6216	2800	75,7°
1°	0,598	6218	36488	76,6°
2°	1,145	6221	69870	75,7°
3°	1,654	6219	100862	75,0°
4°	2,112	6218	128856	74,2°



5°	2,512	6219	153222	73,7°
6°	2,856	6219	174234	73,4°
7°	3,151	6219	192232	73,1°
8°	3,403	6219	207581	73,0°
9°	3,617	6219	220642	72,8°
10°	3,799	6220	231750	72,7°
11°	3,954	6220	241196	72,6°
12°	4,086	6220	249248	72,5°
13°	4,200	6220	256164	72,4°
14°	4,297	6220	262095	72,4°
15°	4,379	6220	267091	72,3°
16°	4,446	6219	271188	72,2°
17°	4,498	6219	274353	72,1°
18°	4,535	6219	276603	72,0°
19°	4,558	6219	278041	71,9°
20°	4,570	6218	278786	71,7°
21°	4,573	6218	278941	71,7°
22°	4,567	6218	278597	71,6°

exit

...etc jusqu'à 21° de gîte quand le couple transversal commence à diminuer.

Cela concerne également le calcul des efforts maximums assumés par les bras de liaison entre les coques. Mon logiciel calcule les contraintes maxi sur les bras en positionnant le trimaran successivement à tous les angles de gîte et à tous les angles d'assiette jusqu'au maximum des forces en tenant compte des orientations des forces correspondantes. Ainsi tous les cas de figure sont envisagés aussi bien pour les assiettes vers l'avant que vers l'arrière. Ces calculs sont impossibles à réaliser à la main !

Ass : Assiette vers l'avant  
 Mom.max : Couple de redressement  $Depl(t) \times levier$   
 Orientation : Angle depuis l'étrave de la position du LCB par rapport au LCG  
 D.flott : Déplacement du flotteur sous le vent dans cette position  
 Bras.AV : Longueur du levier du bras avant  
 Bras.AR : Longueur du levier du bras arrière  
 FAV : Force appliquée au bout du levier du bras avant  
 Moment : Moment de FAV par Bras.AV en N.m  
 FAR : Force appliquée au bout du levier du bras arrière  
 F.Horiz : Force appliquée sur le flotteur dans le sens longitudinal

-----  
 pav(x, y) = point de la fixation de la poutre avant  
 par(x, y) = point de la fixation de la poutre arrière  
 LCBflott(x, y) = Centre de carène du flotteur sous le vent  
 F = Force verticale = déplacement du flotteur \* 1.025  
 Fc = F . COS(assiette)  
 Bras.AV = pav(y) - LCBflott(y)

Bras.AR = par(y) - LCBflot(y)  
 db = par(x) - pav(x)  
 dc = pav(x) - LCBflot(x)  
 dc > 0 : FAV = Fc + Fc \* dc / db----- FAR = Fc \* dc / db  
 dc < 0 : FAV = Fc \* db / (db + dc)---- FAR = Fc \* dc / (db + dc)  
 F.Horiz = déplacement du flotteur \* 1.025 \* SIN(Assiette)  
 FAV, FAR et F.Horiz multipliés par 9.81 : Newton

-----

**Moment maxi sur le bras avant : 115277 N.m**  
**à la gîte : 20°**  
**à l'assiette : 5°**  
**à l'orientation : 60,8°**

Angle de gîte 0°

Ass	t.m Mom.max	Orientation °	kg D.flott	m Bras.AV	m Bras.AR	N FAV	N.m Moment	N FAR	N F.Horiz
0°	0,019	0,0°	2	2,686	2,675	15	40	5	0
1°	3,528	0,0°	11	2,734	2,722	97	265	12	2
2°	6,944	0,0°	58	2,791	2,779	629	1755	58	20
3°	10,200	0,0°	124	2,797	2,785	1453	4063	234	64
4°	13,068	0,0°	193	2,795	2,783	2321	6489	435	132
5°	15,562	0,0°	261	2,791	2,780	3206	8948	651	223
6°	17,711	0,0°	328	2,787	2,775	4079	11369	877	337
7°	19,552	0,0°	392	2,783	2,771	4925	13704	1104	469
8°	21,121	0,0°	453	2,778	2,766	5732	15924	1330	619
9°	22,457	0,0°	510	2,774	2,762	6494	18012	1549	783
10°	23,593	0,0°	564	2,769	2,757	7208	19961	1761	961
11°	24,558	0,0°	614	2,765	2,753	7874	21771	1964	1149
12°	25,381	0,0°	660	2,761	2,749	8493	23446	2157	1347
13°	26,088	0,0°	704	2,757	2,745	9070	25002	2341	1553
14°	26,696	0,0°	745	2,753	2,741	9605	26441	2515	1768
15°	27,213	0,0°	783	2,749	2,737	10098	27758	2678	1988
16°	27,641	0,0°	818	2,745	2,734	10533	28918	2822	2211
17°	27,969	0,0°	848	2,743	2,731	10901	29895	2941	2433
18°	28,201	0,0°	876	2,740	2,728	11206	30706	3036	2655
19°	28,349	0,0°	900	2,738	2,726	11458	31371	3109	2874
20°	28,425	0,0°	922	2,736	2,725	11661	31910	3165	3092
21°	28,441	0,0°	941	2,735	2,723	11825	32341	3205	3309
22°	28,406	0,0°	959	2,734	2,722	11953	32677	3233	3523
23°	28,327	0,0°	975	2,733	2,721	12051	32932	3250	3736
24°	28,202	0,0°	991	2,732	2,720	12141	33168	3261	3953
25°	28,068	0,0°	1002	2,731	2,719	12169	33238	3257	4156
26°	27,883	0,0°	1016	2,731	2,719	12209	33337	3252	4369
27°	27,693	0,0°	1026	2,730	2,718	12201	33311	3235	4569

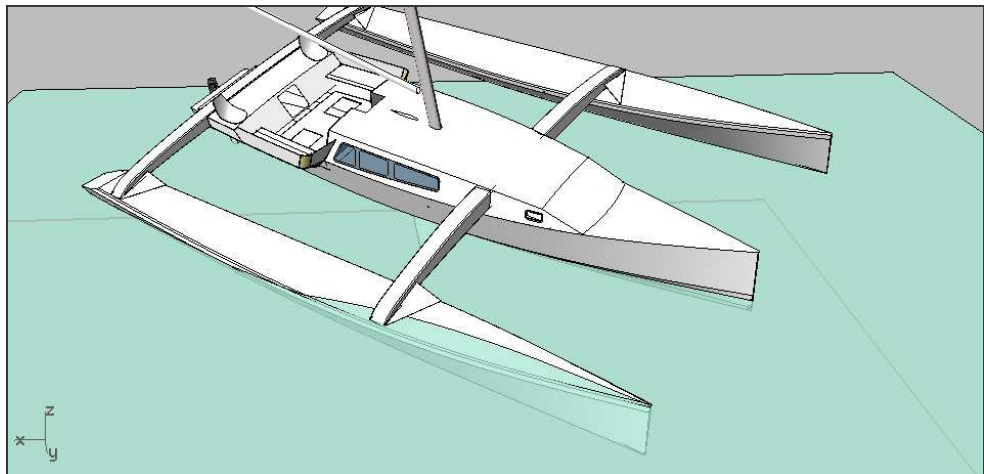
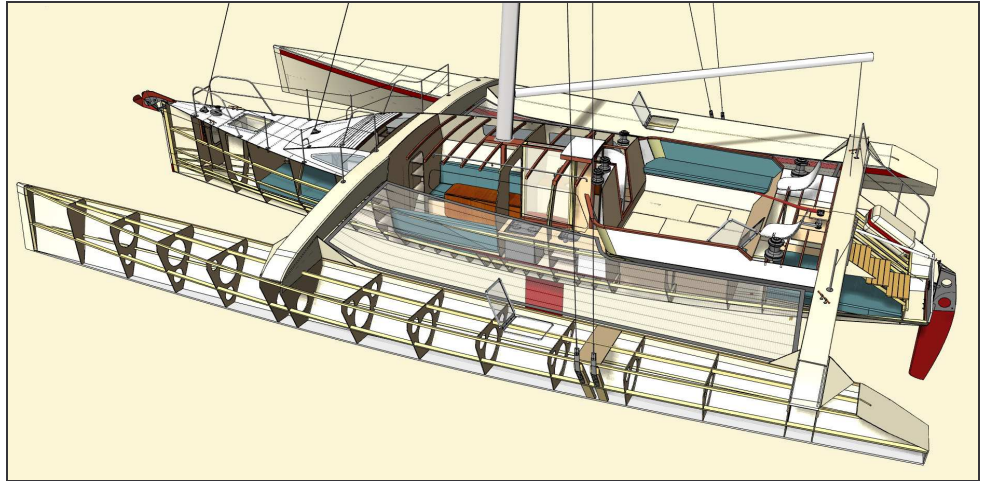
exit

Angle de gîte 1°

Ass	t.m Mom.max	Orientation °	kg D.flott	m Bras.AV	m Bras.AR	N FAV	N.m Moment	N FAR	N F.Horiz
0°	0,289	73,4°	93	2,758	2,750	691	1905	217	0
1°	3,732	76,5°	131	2,769	2,761	1139	3154	143	22
2°	7,135	75,6°	202	2,773	2,765	2044	5668	164	69
3°	10,294	75,0°	276	2,772	2,764	3019	8369	315	142
4°	13,148	74,2°	349	2,770	2,762	3991	11055	576	239
5°	15,632	73,7°	421	2,766	2,758	4960	13719	843	360
6°	17,774	73,4°	491	2,762	2,754	5900	16297	1110	503
7°	19,609	73,1°	557	2,758	2,750	6797	18748	1373	666
8°	21,173	73,0°	619	2,754	2,746	7642	21048	1629	845
9°	22,505	72,8°	677	2,750	2,742	8431	23187	1874	1039
10°	23,637	72,7°	730	2,746	2,738	9162	25162	2107	1244
11°	24,600	72,6°	780	2,743	2,735	9836	26978	2328	1459
12°	25,421	72,5°	826	2,739	2,731	10458	28643	2536	1684
13°	26,126	72,4°	868	2,735	2,727	11031	30174	2732	1916
14°	26,731	72,4°	908	2,732	2,724	11555	31568	2914	2154
15°	27,240	72,3°	943	2,729	2,721	12008	32769	3073	2394
16°	27,658	72,2°	972	2,726	2,718	12363	33707	3197	2628
17°	27,980	72,1°	996	2,724	2,716	12633	34416	3290	2856
18°	28,210	72,0°	1016	2,723	2,715	12837	34949	3357	3080
19°	28,356	71,9°	1033	2,721	2,713	12988	35343	3404	3300

20°	28,432	71,7°	1048	2,720	2,712	13097	35625	3434	3517
21°	28,448	71,7°	1061	2,719	2,711	13171	35814	3451	3731
22°	28,413	71,6°	1073	2,718	2,710	13216	35926	3457	3943
23°	28,335	71,5°	1083	2,718	2,709	13237	35972	3454	4153
24°	28,210	71,4°	1094	2,717	2,709	13255	36013	3446	4367
25°	28,076	71,4°	1101	2,716	2,708	13217	35903	3426	4566
exit									

...etc, jusqu'à une force maxi entre l'assiette et la gîte.

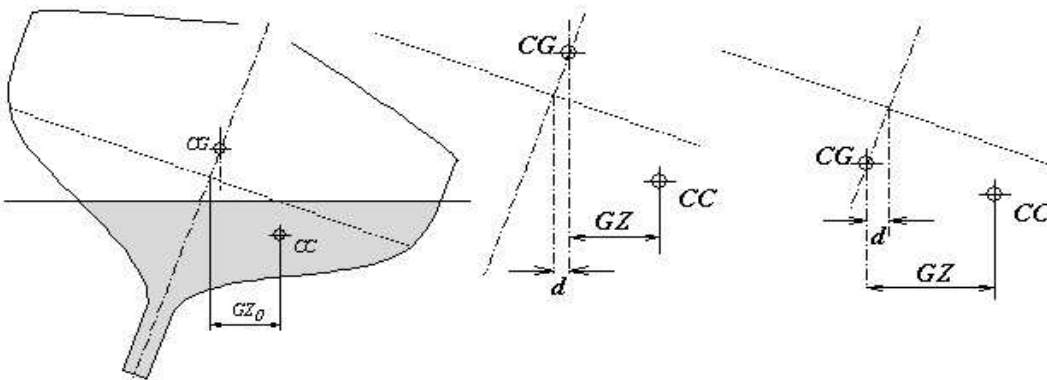


Les forces maximales de traction des haubans se répartissent sur les deux bras «au vent » selon les formules des moments...

Une fois que la contrainte maximum est déterminée en statique, on multiplie tout par une accélération supérieure à l'accélération terrestre et par un coefficient de sécurité égal ou supérieur à deux... et on détermine un échantillonnage adapté.

## Capacité de redressement par mer forte et vent fort.

**À quoi sert de connaître** la position du CG général du navire ? À effectuer les calculs de stabilité et vérifier que le navire sera apte à naviguer en respectant les exigences minimum nécessaires pour la sauvegarde de la vie humaine en mer. S'il s'agit d'un voilier, la courbe de stabilité doit être capable de supporter un minimum de toile selon la force du vent et l'état de la mer.



La position du CG donne la valeur du couple de redressement égal au levier redressant  $GZ \times D$  la masse du bateau. Selon la position du CG le levier  $GZ_0$  sera augmenté ou diminué de «  $d$  » comme le montre le croquis ci-dessus.

Maintenant essayons d'imaginer une masse de plusieurs dizaines de tonnes posée en équilibre hydrostatique sur l'eau : la force de gravitation est exactement compensée par la poussée d'archimède.

Il suffit qu'une mouche se pose sur le pont pour que ce

bel équilibre soit rompu, mais pas « instantanément », le fait n'est pas concevable, rien ne se produit instantanément à cause de l'inertie des masses qui résistent au mouvement. L'équilibre parfait est retrouvé après « un temps » de tâtonnements et d'oscillations en plus ou en moins autour de la position idéale, après une « période » d'adaptation. Exactement comme on peut le constater en observant les mouvements d'un pendule laissé libre de trouver son repos.

Maintenant le bateau navigue sur une mer agitée, le vent et la houle le bousculent continûment ou alternativement. Devant les assauts des vagues, il commence à résister en fonction de sa masse et d'autant plus qu'il est massif. Mais une fois que le mouvement de roulis est amorcé, l'élan doit être amorti sous peine de retournement complet, quille en l'air...

Depuis des temps anciens, les hommes on pensé à ces questions et cherché des méthodes permettant de contrôler la stabilité transversale des navires. Le premier éléments concerne évidemment la courbe de stabilité statique.

Cela est parfaitement bien défini dans la « division 211 » publiée dans le journal officiel sous le titre :

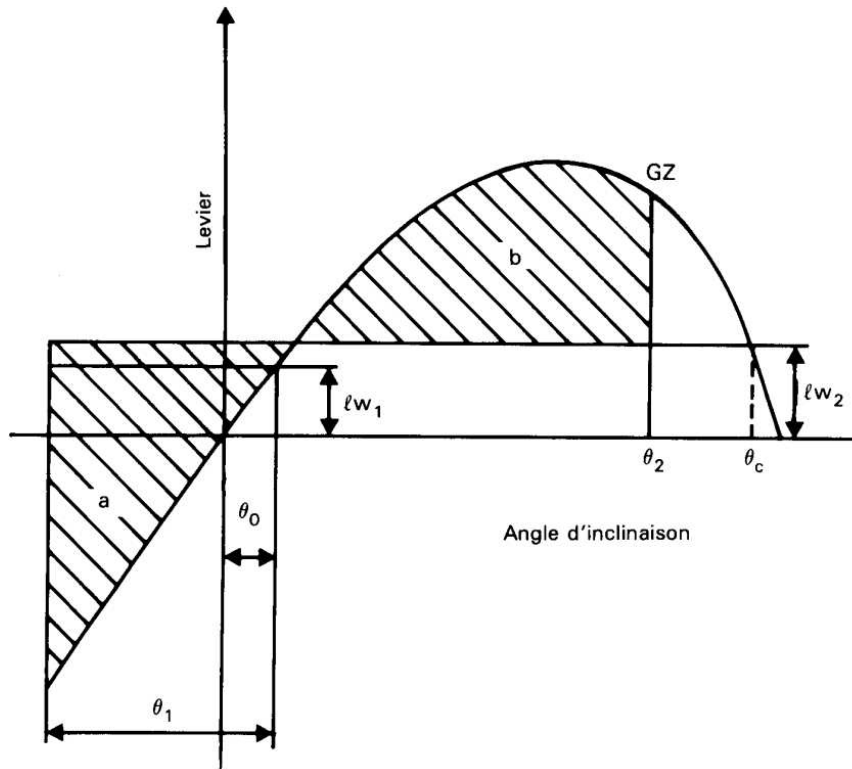
ANNEXE 211-1.A.3. CAPACITÉ DE REDRESSEMENT PAR VENT FORT ET MER FORTE DES PETITS NAVIRES (navires à passagers de jauge brute inférieure à 500 et navires de pêche de longueur L inférieure à 24 mètres).

Ce document est disponible sur internet, il est parfait-

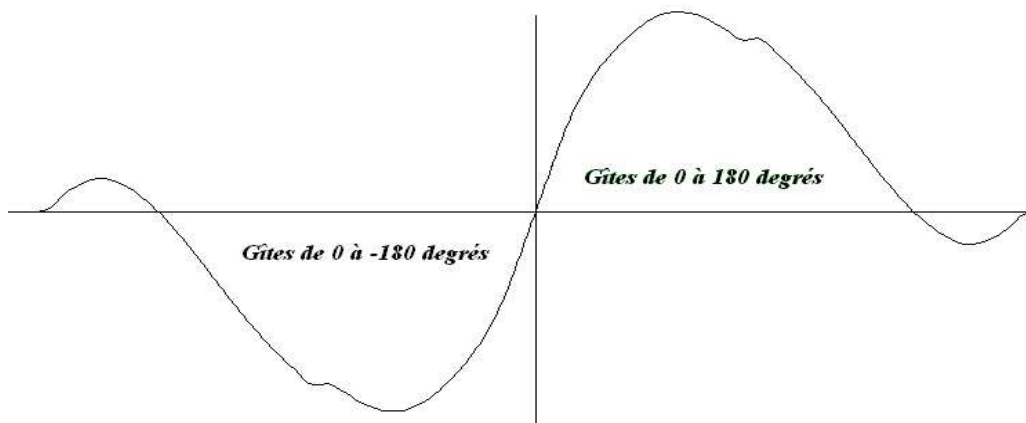
tement explicite.

Le principe est, comme d'habitude, de définir une limite de conditions de mer et de vent au-delà de laquelle plus rien ne sera censé résister.

Voilà comment les choses se présentent :



La courbe de stabilité est dessinée en deux parties inversées autour de l'axe marqué « levier »



On part d'une position du navire incliné « au vent » d'un angle  $\theta_1$ , c'est-à-dire dans le sens opposé à celui

des vagues et du vent. Le couple de redressement impulsera au navire un mouvement dans le sens du vent avec une certaine énergie qui devra être compensée par la même énergie inverse pour stopper le roulis. On mesure ces énergies par l'aire des surfaces délimitées sous la courbe de stabilité en positif et en négatif. Mais on doit considérer qu'un vent constant fait gîter le navire de l'angle  $\theta_0$  et procure une perte de couple de redressement notée  $lw_1$ , lequel donne un nouvel axe délimitant le négatif du positif.  $lw_1$  est calculé en fonction d'une force de vent située entre 314 et 504 Pascals, c'est-à-dire 32 et 51,4 kgf/m<sup>2</sup> (un bon force 9) selon l'altitude, multipliée par le nombre de m<sup>2</sup> de fardage (surface exposée au vent) et par la hauteur au-dessus de l'eau.  $lw_2 = 1,5 lw_1$  pour tenir compte des rafales de vent.

Finalement l'aire de la partie « b » doit être supérieure à l'aire de la partie « a », sinon le navire n'est pas apte à prendre la mer.

Ces limites empiriques ne sont fixées que par l'expérience et probablement aussi par l'analyse de naufrages.

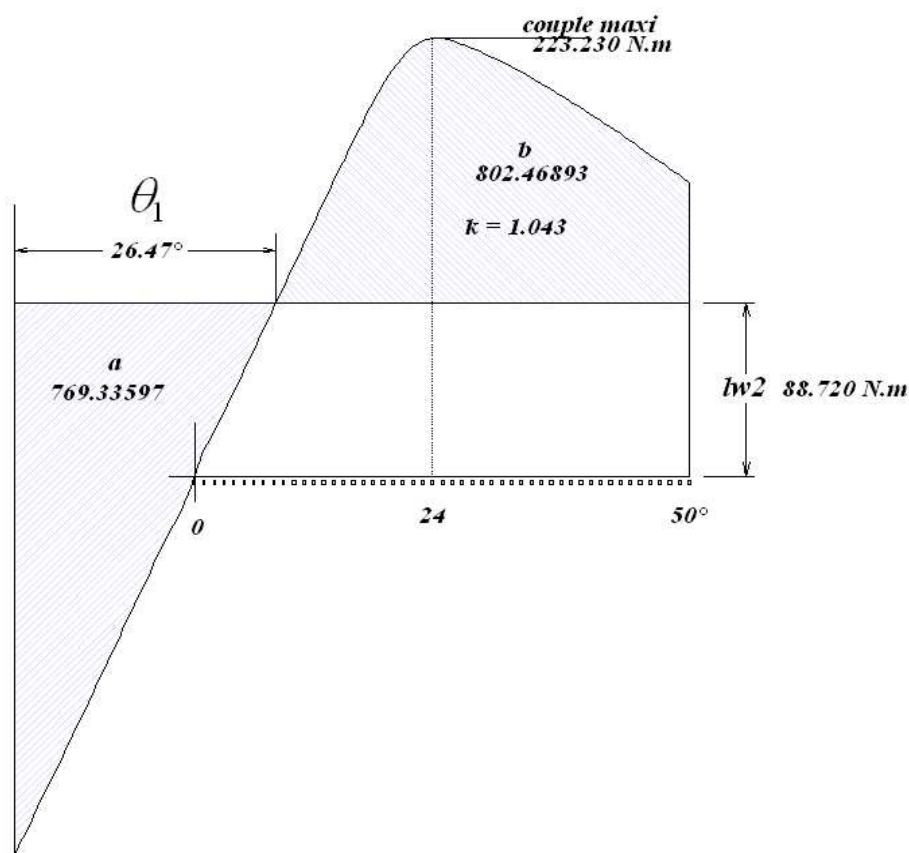
Ces calculs concernant plutôt les navires à moteur mais peuvent très bien s'appliquer aux navires à voiles naviguant sans voile, en tenant compte du fardage de tout le gréement en plus de ceux de la coque et des superstructures.

Les normes ISO internationales ont adopté la même démarche mais un peu simplifiée et plus exigeantes dans certains cas. Le calcul de  $\theta_1$  dépend de la for-

mule empirique suivante :

$$\theta_1 = 25 + \frac{20}{Vd} \text{ en degrés}$$

25° représente un « forfait » de base auquel on doit ajouter quelques degrés proportionnels à l'inverse du déplacement  $Vd$  en  $m^3$  du navire en l'état.



L'angle maximum à prendre en compte est limité à 50° sur la courbe de stabilité statique dans la mesure où le navire reste étanche à cet angle et qu'il ne se produit aucun envahissement.

$lw2$  est un couple inclinant calculé avec le fardage du navire ou la surface « S » projetée, total de tout ce qui se trouve au dessus de l'eau multiplié par la distance



de Cg de cette surface au Cg de la surface de dérive de la carène complète, disons « d »

$$lw^2 = 0,53 \times S \times d \times 28^2$$

28<sup>2</sup> concerne une vitesse de vent au carré en m/s pour la catégorie « A ».

La force du vent sur une surface S est environ :

$$f = 0,5 \times S \times \rho \times v^2 \times C$$

Avec  $\rho$  = masse volumique de l'air (1,222 kg/m<sup>3</sup>)

« C » est un coefficient de forme, ici égal à 1.

28 m/s (54 nœuds) donnent environ 490 N sur un m<sup>2</sup> de surface exposée.

Le coefficient « 0,53 » dérive de « 0,5 » du calcul de « f » ci-dessus avec un petit supplément pour faire bonne mesure et tenant compte de la masse de l'air (?).

Ceci étant, la surface « a » doit être inférieure à la surface « b ».

Les limites admises pour les voiliers monocoques ou les voiliers multicoques ne sont pas les mêmes. Les multicoques doivent satisfaire des exigences particulières moins contraignantes pour ce qui concerne l'angle de chavirement qui est très inférieur à celui des monocoques. En revanche certaines dispositions doivent être respectées en cas de retournement. Les normes acceptent donc de déroger aux règles concernant tous les navires en faisant des exceptions, sans quoi aucun multicoque ne serait déclaré apte à naviguer au grand large...

## Les calculs d'échantillonnage

Extrait de la norme ISO 12515-5.

**E**NOTE :

*La présente norme a pour but de garantir que le bateau est capable de supporter les charges opérationnelles prévues. En supplément des charges imposées par la mer, qui ont été converties en pression de conception et épaisseur requise dans la partie précédente de ce document, tous les bateaux doivent pouvoir résister aux chocs dus à l'impact avec des débris flottants, provenant d'objet tombant depuis une certaine hauteur, ou dus à l'accostage, la manipulation ou d'autres chargements similaires. L'épaisseur minimale des fonds et de la muraille est principalement gouvernée par la vitesse et le déplacement du bateau. L'épaisseur minimale du pont est considéré comme uniquement fonction de la longueur. Ces exigences sont basées sur des valeurs expérimentales liées à la robustesse.*

Les normes définissent un certain nombre d'exigences touchant à tous les domaines tels que la sécurité, les installations mécaniques, la plomberie, l'électricité, la stabilité et l'échantillonnage de toutes les parties du navire.

En ce qui concerne ce dernier poste, les formules de résistance des matériaux utilisées sont celles de la théorie académique même si la discussion reste ouverte concernant des détails et des appréciations diverses. Toujours est-il que les normes adoptent des règles émanant de la consultation de très nombreux interve-

nants sur une longue période.

Avant de commencer à effectuer des calculs de RDM, il convient de préciser les hypothèses, ce qui n'est pas toujours donné comme allant de soi. Par exemple quelles pressions faut-il appliquer sur la coque et en fonction de quels critères ?

Les critères seront a priori ceux du tirant d'eau de la coque, de son poids, de sa vitesse estimée, de sa longueur, de son régime en déplacement ou en mode planant et bien d'autres critères tenant compte de la dimensions des panneaux, du bordé ou des raidisseurs. C'est également le sens de la démarche d'autres normes déjà en vigueur : Veritas, ABS (American Bureau of Shipping), etc, précisent des pressions en fonction de l'emplacement sur le navire, avant, arrière, dessous, dessus ainsi que de la taille des panneaux ce qui peut paraître surprenant ; comme si les grands panneaux étaient moins sollicités que les petits. L'expérience ajuste des critères empiriques.

Les exigences portent toujours sur le minimum admissible, sans limite pour le maximum.

C'est là qu'intervient la tentation simplificatrice, avec le fameux « trop fort n'a jamais manqué ».

C'est exact mais pas totalement car le poids intervient toujours de façon négative, il diminue les performances et augmente les contraintes.

L'avenir se précise déjà avec les logiciels de calcul par éléments finis. Les normes devront homologuer au moins un logiciel qui serait dès lors en position de monopole, ce qui n'est déjà pas acceptable dans le principe.... Je me demande parfois avec tristesse si le mé-

tier n'est pas tout simplement en train de disparaître au profit d'une robotisation incontrôlable ?

Toujours est-il que les normes, pour ce qui concerne les calculs d'échantillonnage, sont constituées d'un ensemble de formules que chacun peut appliquer et utiliser sans se poser de questions ni existentielles, ni éthiques, ni mathématiques, en n'y trouvant aucune motivation sinon celle d'appliquer une réponse « assermentée » sans autre forme de procès.

En principe les chantiers navals sont censés respecter les normes en vigueur, même si elles ne sont pas encore totalement validées dans certains cas. Il faut reconnaître que la liberté est donnée à chacun de faire valoir ses propres méthodes et ses façons de procéder...

Les inspecteurs vérifient que les plans sont bien « normalisés » et que la mise en œuvre est effectuée selon « les règles de l'art ». Cette dernière approche soulève nombre de difficultés et nombre d'impossibilités qui me font parler « d'éthique » dans certains cas particuliers lorsque les matériaux sont fabriqués par le chantier et mis en œuvre selon ses us et coutumes et selon son expérience. Que viendra faire l'inspecteur qui ne saurait être en permanence derrière le dos de l'ouvrier ? Ce qui fait dire que le chantier reste soumis au bon vouloir des inspecteur pour la validité de son ouvrage tout en étant obligé de régler des factures souvent fort onéreuses pour obtenir la certification officielle et acquérir le droit de vendre sa production...

Qui sera responsable en cas de pépin ? Le chantier pourra-il se tourner vers l'organisme de certification qui aura signé le procès verbal de contrôle et autoriser la navigation en haute mer ? Quel est le rôle de l'architecte là-dedans ? Le bateau ne sera couvert par un assureur que si le certificat existe. L'assureur peut aussi se prévaloir de son expérience et demander que soit modifié tel aspect de la construction.

Le travail du bureau d'étude se mène donc avec les inspecteurs des normes, l'assureur, le chantier naval... mais surtout avec l'expérience théorique et pratique.

Il se peut que des objections et des discussions soient soulevées, parfois avec un enrichissement des protagonistes, ce qui est heureux, mais parfois avec des échanges d'argumentaires assez difficiles. Les normes ne disent pas encore qui représente forcément l'autorité même si parfois la tentation est grande et que l'obligation légale de respecter les « évangiles » est sous-tendue dans un sens bien déterminé en cas de désaccord.

Ce qui me fait aborder le chapitre suivant, les hypothèses...

## Les hypothèses

**A**vant de calculer quoi que ce soit, il convient de bien cerner les problèmes et de définir les hypothèses chiffrées, autant que possible, et surtout de se servir du « bon sens ».

Par exemple, que faut-il prévoir pour fixer le guindeau sur le pont à l'avant (le treuil pour virer l'ancre) ?

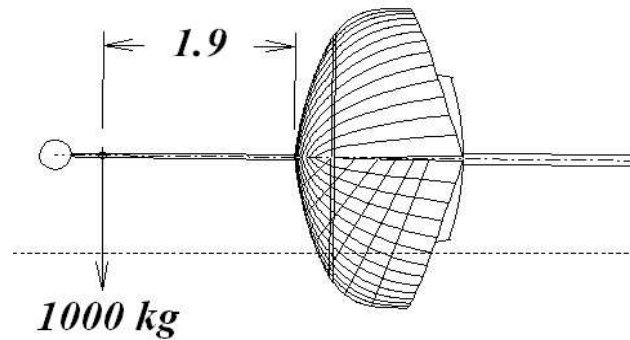
Un bon mouillage suppose qu'il sera capable de tenir le navire dans des conditions difficiles de vent et de mer. Quelles conditions ? Un vent de force 9 et des creux de 1 mètre ? Pourquoi pas force 12 ? Où se trouve la limite ? Si on s'en tient à, disons un force 8, on peut éventuellement calculer les forces en jeu selon la surface du fardage et retenir un type d'ancre avec sa chaîne correspondante. Tout cela nous emmène dans des suppositions compliquées.

L'expérience procède autrement : les règles imposées par les Normes obligent à choisir un poids d'ancre et un diamètre de chaîne en relation avec la longueur et le déplacement du bateau. Là, tout est dit d'un seul coup. Un diamètre de chaîne supporte une charge bien définie avant de se rompre. En principe, il vaut mieux que la chaîne se brise plutôt que le guindeau soit arraché du pont ; voilà donc comment calculer les fixations et les renforts nécessaires. Dès lors la question est résolue.

**Autre exemple** concernant la fixation d'un lest constitué d'un voile de quille et d'un bulbe en plomb. Quelle sera la sollicitation maximum en toutes circons-

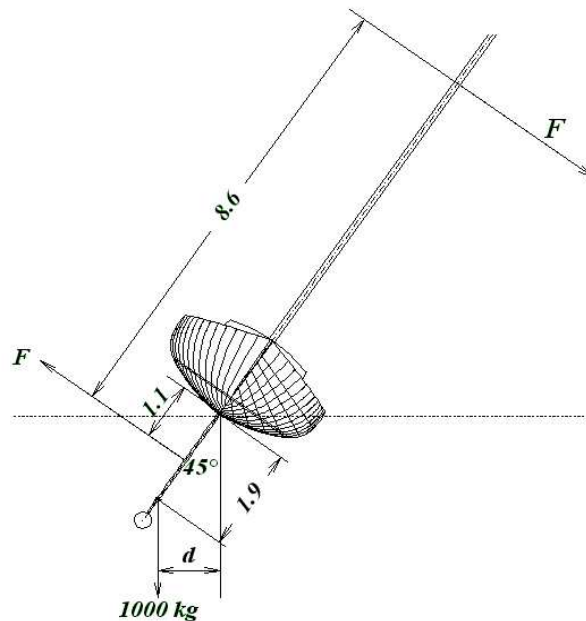
tances ? En effet, il n'est pas question que le lest se désolidarise de la coque, cela signifierait la perte du navire et éventuellement celle de l'équipage.

Comment travaille un lest « suspendu » et quel sera la valeur du couple maximum à la liaison avec la coque ?



On considère la configuration ci-dessus, tout simplement. Ce n'est qu'une hypothèse simplificatrice retenue par les Normes quelle que soit la géométrie du voile de quille. Avec ces chiffres, le moment de flexion à la fixation sur la coque sera de 1900 kgf.m ou 18639 N.m.

Essayons une petite analyse avec le couple de redressement maximum du navire :



Sous l'effet du vent et des surfaces anti-dérive, le voilier gîte ici d'un angle de  $45^\circ$  qui correspond au couple de redressement maximum pour ce voilier particulier : 3 tonnes.mètres dans cet exemple. Ce couple permet de calculer la force  $F$  en supposant que le voile de quille assume toutes les réactions anti-dérive, ce qui n'est pas le cas, mais admettons :

$$F = \frac{3.t.m}{8,6.m} = 349.kgf$$

Cette force crée un couple de  $349 \times 1,1.m = 384.kgf.m$  à la liaison quille/coque.

Le poids du lest de 1000 kg crée un couple inverse au même endroit de  $1000 \times 1,9 \times \sin 45 = 1343.kgf.m$

Couple total :  $1343 - 349 = 992.kgf.m$

Mais cette façon de procéder est purement statique, les mouvements du navire, parfois brutaux produisent des efforts par les effets des accélérations. Prenons l'hypothèse réaliste d'une période de roulis de 4 secondes pour un débattement de  $45^\circ$  d'un bord sur l'autre. Le Cg du lest effectue donc un aller-retour sur un angle de  $90^\circ$  soit sur une distance de :

$$\frac{2 \times 1,90 \times \pi}{4} = 2,98m$$

soit sur une distance de 1,49 m d'un bord à l'axe médian parcourue en 1 seconde. Un peu de cinématique : la masse du lest accélère de 0 à  $v$  en 1 seconde sur une distance de 1,49 m.(d)

l'accélération est donc :



$$a = \frac{2 \times d}{t^2} = \frac{2,98}{1^2} = 2,98.m / s^2$$

(l'accélération terrestre est de 9,81 m/s<sup>2</sup>)

Force nécessaire pour accélérer une masse de 1000 kg de 2,98 m/s<sup>2</sup> :

$$f = ma = 1000 \times 2,68 = 2680.Newtons \text{ ou } 273 \text{ kgf}$$

Maintenant pensons à la pression de l'eau sur le voile de quille, encore avec nos hypothèses approximatives :

La vitesse instantanée maxi sera :

$$a \times t = 2,98 \times 1 = 2,98m / s$$

La surface S dans notre exemple est de 1,33 m<sup>2</sup>

La pression sera grossièrement :

$$\frac{1}{2} \times 1,33 \times v^2 \times 1025 = 6053.Newtons$$

soit 617 kgf. La vitesse instantanée est calculée ici pour le tirant d'eau maximum. On peut encore faire l'hypothèse que cette vitesse sera divisée par deux en moyenne au CG de la surface ce qui donnerait finalement 308 kgf.

L'eau agitée par le déplacement du voile de quille demande de l'énergie, il faut donc encore ajouter la « masse d'eau additionnelle » à l'inertie du système, estimons qu'il faille multiplier par deux la pression, ce qui ferait 617 kgf au total...( ?)

Total des moments issus des inerties et de la pression :

$$273 \times 1,9 + 617 \times 1,1 = 1197kgf.m$$

On est loin du moment donné par la première estimation de 1900 kgf.m, même si ces derniers calculs sont très approximatifs.

On garde donc l'hypothèse première avec le lest incli-

né à 90° et en adoptant un coefficient de sécurité au moins égal à 2.

Maintenant, on prévoit le varangage et le boulonnage adapté à 1900 kgf.m.

Continuons encore un peu avec ce lest dans le sens longitudinal pour voir où cela nous mène.

La contrainte résultant de l'inertie du lest lors de ses mouvements longitudinaux ne seront rien par rapport à une éventuelle collision contre un rocher. Nous devons donc envisager la question de cette manière très brutale. Quelle sera la limite, quelle force devra-t-on retenir pour échantillonner le varangage et le fond du navire ?

Si j'énonce par exemple que la fixation du lest devra résister à un choc contre un caillou à la vitesse de 25 nœuds (12,9 m/s), on pensera tout de suite sans effectuer le moindre calcul que le problème sera impossible à résoudre. Les forces en jeu sont directement proportionnelles à la masse du navire et peuvent atteindre des chiffres considérables même à très petite vitesse. On a vu des images d'un cargo entrant de face contre un quai : il se découpe comme une vulgaire boîte de conserve sur une longueur interminable alors qu'il semble ne jamais vouloir s'arrêter.

Nous avons longuement échangé des hypothèses entre confrères pour essayer de retenir des chiffres acceptables à utiliser comme base de calcul qui serait validée dans les Normes pour tous les voiliers jusqu'à 24 mètres de longueur. Le sujet de la réflexion est une vraie gageure. La masse d'un navire de 24 mètres peut dépasser 60 tonnes et celle d'une embarcation de 6 mè-

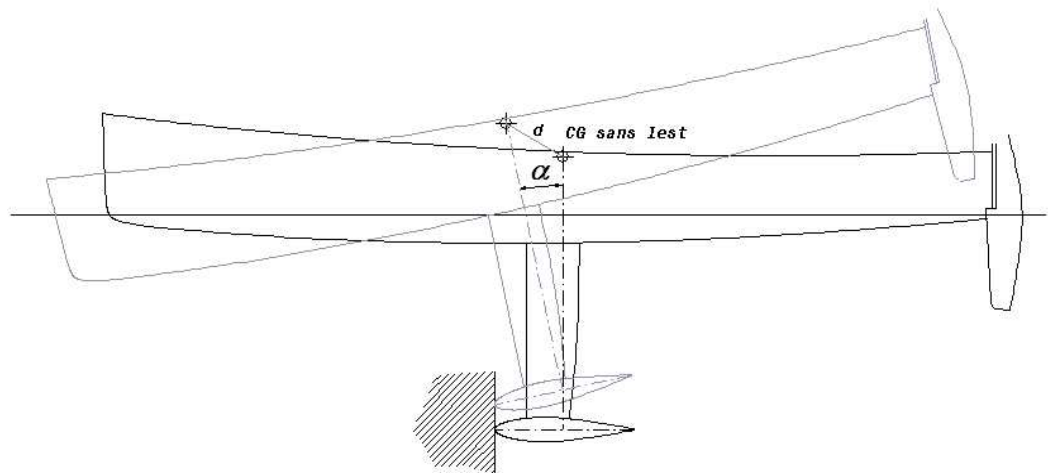
tres tournera autour d'une petite tonne. À vos calculettes pour trouver la formule qui plaira à tous les cas de figure...

L'hypothèse finalement retenue pour les Normes est celle-ci :

$$F_4 = 1,2 \times g \times (M_{navire} - M_{quille}) - \text{en Newton} -$$

Il faut donc soustraire la masse de la quille de la masse du navire pour effectuer ce calcul empirique qui parle de lui-même.

Le principe étant que si le lest rencontre un caillou, il sera stoppé net et la masse du navire au dessus de lui continuera son bonhomme de chemin en décélérant à hauteur de 1,2 g. Voilà donc comment les choses se présentent selon cette hypothèse peut-être simpliste pour notre voilier :



Poids du navire moins poids du lest :  $4269 - 1000 = 3269$  kg.

$$F_4 = 1,2 \times 9,81 \times 3269 = 38483 \text{ Newtons (3922 kgf)}$$

La hauteur entre le point d'impact et le dessous de la coque est de 1,99 m. Le moment de flexion en longitudinal à la liaison avec la coque sera donc de :

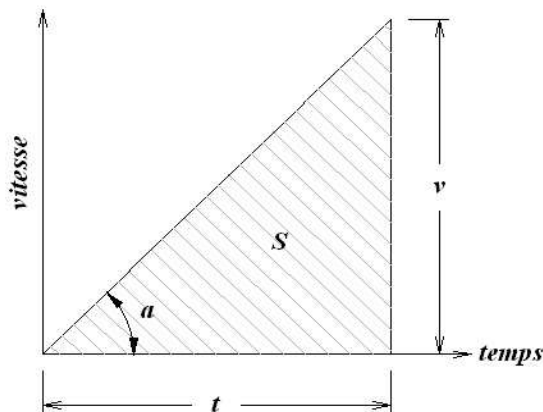
$$38483 \times 1,9 = 73118 \text{ N.m}$$

Mais quelle était la vitesse du navire au moment de l'impact selon cette hypothèse ?

En supposant que :

- la décélération soit constante, c'est-à-dire que la force appliquée à la masse soit constante et égale à elle même,
- que la distance parcourue de la coque sans lest après l'impact soit, comme sur le dessin, de 0,88 mètres,
- que la décélération «  $a$  » serait de 1,2 g soit 11,77 m/s<sup>2</sup>.

Un peu de cinématique :



Ce graphique temps-vitesse, selon les calculs du mouvement uniformément accéléré, indique que la surface  $S$  représente le chemin parcouru et «  $a$  » l'accélération de sorte que :

$$v = at \text{ et } v^2 = a^2 t^2$$

$$S = \frac{t \times at}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v = \sqrt{2aS}$$

Puisque  $S$ , chemin parcouru = «  $d$  » dans notre exemple :

$$v = \sqrt{2 \times 11,77 \times 0,88} = 4,55 \text{ m / s}$$

Ce qui représente une vitesse de 8,85 nœuds.

Je ne sais pas quoi en penser. Rencontrer un caillou à près de 9 nœuds, occasionnera de sérieux dégâts au navire ; je ne crois pas qu'il s'en sorte indemne si facilement. Rien ne dit que le navire s'arrêtera sur une distance de 0,88 mètres ! Si je choisis par exemple 0,5 mètres, la vitesse initiale sera égale à 3,43 nœuds !

Mais ce sont là des hypothèses empiriques.

La décélération n'est pas uniforme. L'amortissement de la vitesse doit dépendre directement de la courbe de stabilité longitudinale dans la mesure où le lest est totalement stoppé.

Au moment de l'impact, la décélération est nulle, puis elle augmente à mesure que le couple redressant croît jusqu'à son paroxysme lorsque le navire est totalement arrêté. A ce moment précis, le couple inclinant issu de l'inertie du navire est égal et de sens contraire au couple redressant issu de l'hydrostatique.

Faisons une tentative d'approche en supposant que le navire soit en équilibre à  $14^\circ$  d'assiette :

Déplacement 4.269 t

LCG : 6.763 m

VCG : 0.036 m

ASSIETTES	LEVIERS	MOMENTS
0	0.0796	0.3400
1	0.6828	2.9147
2	1.1902	5.0812
3	1.6092	6.8698
4	1.9624	8.3774
5	2.2567	9.6337
6	2.5054	10.6954
7	2.7212	11.6168
8	2.9062	12.4068
9	3.0665	13.0908
10	3.2065	13.6887
11	3.3297	14.2143
12	3.4384	14.6785
13	3.5348	15.0902
14	3.6206	15.4565

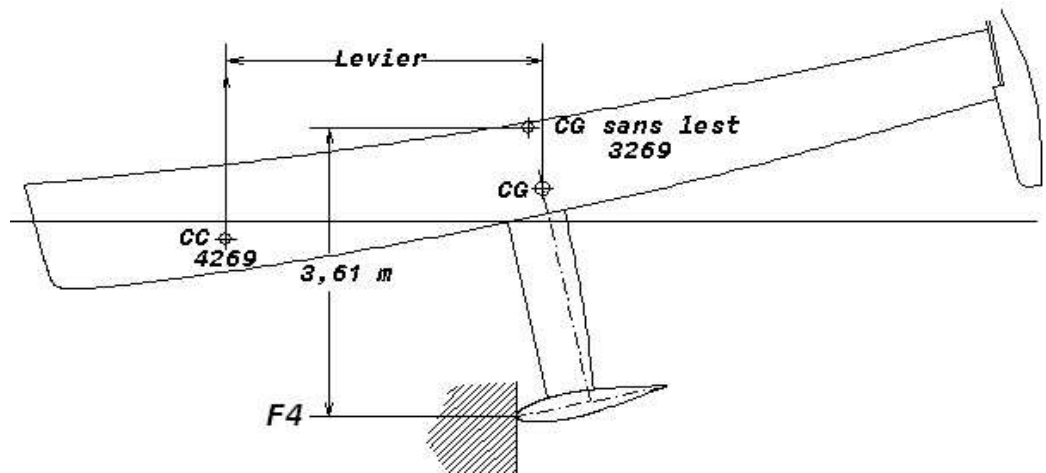
### *Courbe de stabilité longitudinale*

Le couple redressant se monte à 15456 kgf.m lequel doit être égal au couple inclinant et de signe contraire. Action = réaction...

Comment représenter le couple inclinant ? En respectant l'hypothèse de ne garder que la masse du navire moins celle du lest, alors le CG de cette coque se situe 3,61 m du point d'impact. La force F4 devra donc se calculer ainsi :

$$F_4 = \frac{15456}{3,61} = 4281.kgf$$

ou  $4281 \times 9,81 = 41997.Newtons$



Si la masse en prendre en compte est égale à 3269 kg, on en déduit l'accélération :

$$a = \frac{F_4}{m} = \frac{41997}{3269} = 12,85 \text{ m / s}^2$$

qui équivaut à 1,31 g, plus que ce qui est retenu par les Normes pour le calcul des fixations sur la coque (les varangues et les carlingues).

Reprenons le raisonnement...

Supposons que le mouvement du navire soit arrêté après l'impact à un certain angle d'assiette «  $\alpha$  ». À cet instant, considérons que le temps change de sens et remonte en arrière vers le passé. Le navire commence donc à prendre de la vitesse poussé par une force égale à celle donné par son couple de redressement longitudinal, comme je l'ai suggéré précédemment, degré par degré depuis l'angle «  $\alpha$  » jusqu'à l'angle zéro avant l'impact du bas de la quille sur l'obstacle alors que le navire progresse à la vitesse inconnue «  $v_0$  ».

La distance du point d'impact au CG du navire sans lest est égal à « R », soit 3,61 m dans notre exemple.

Estimons que la distance totale parcourue par le CG sans lest soit égale à un arc de cercle de longueur « l » :

$$l = \frac{2\pi R\alpha}{360}$$

soit pour 14° d'assiette,  $l = \frac{2\pi \times 3,61 \times 14}{360} = 0,882m$

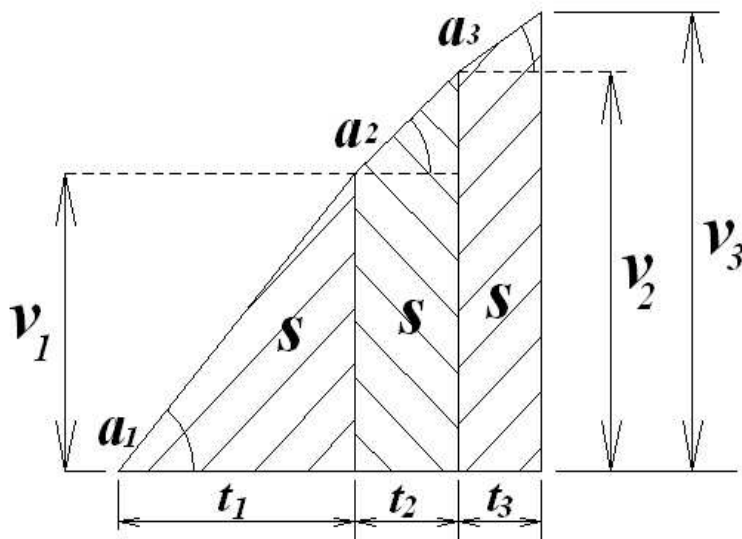
Essayons de parcourir les 14° d'assiettes de la façon suivante, degré par degré :

Chaque degré d'assiette déplace le CG de « s »

$$s = \frac{0,882}{14} = 0,063m$$

Pour chaque « degré » de déplacement, la distance parcourue est la même, soit les aires « s » sur le croquis ci-dessous sont toutes identiques.

On déduit que  $t_i = \sqrt{\frac{2 \times s}{a_i}}$  et  $v_i = t_i \times a_i$  ; cela pour le triangle du début...



Les valeurs de  $a_i$  correspondent aux accélérations qui peuvent être déduites de la courbe de stabilité longitu-



dinale comme nous l'avons supposé.

Ensuite pour le calcul de  $t_2$  :

$$s = v_1 t_2 + t_2 \times t_2 \frac{a_2}{2} = v_1 t_2 + t_2^2 \frac{a_2}{2}$$

$$0,5 \times t_2^2 a_2 + v_1 t_2 - s = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{v_1^2 + 2a_2 s}}{a_2} - v_1$$

$$v_2 = v_1 + t_2 a_2$$

et ainsi de suite....

Finalement de proche en proche, lorsque l'assiette est revenue à zéro pour un dernier calcul, on obtient la vitesse du navire au moment de l'impact.

Pour une décélération de 1,2 g, l'angle d'assiette serait de 11° environ.

C'est ici une manière d'aborder la question...

Le fait de savoir jusqu'à quelle vitesse un navire doit pouvoir encaisser un choc sans faillir contre son lest selon les Normes doit donner une idée acceptable ou non acceptable selon notre expérience de la mer. En réalité les choses ne se produisent jamais de manière aussi « franche » mais, il faut bien se baser sur une hypothèse pour effectuer quelques calculs !

Le petit logiciel ci-dessous permet de résoudre ce genre de problème. Une fonction polynôme déduite de la courbe de stabilité facilite la démarche et permet de diviser la distance parcourue par le CG par 100, ou plus. Les calculs cumulatifs approcheront une solution mieux « lissée » de cette manière.

```
'input "déplacement total du bateau : ",dt
dt = 4269

```

```

lest =1000
d = dt-lest
'd=poids du navire sans lest
input "angle d'assiette maxi : ", j

10:

'input "nombre de divisions pour le calcul : ", div
div=100

'input "Distance verticale CG / bulbe : ", R
R=3.61

'****valeur de s
s = (3.1416*2*R*j/360)/div
'****angle mini
amini=j/div
'****prendre div = 100 par exemple
tt=0 '**** total des temps cumulés

for i = j to 0 step -amini
  '****fonction polynôme gz(i) déduite de la courbe de
  stabilité latérale.
  gz = 0.797317279942281*i
  gz = gz -0.133262742303993*i^2
  gz = gz + 0.0210075421877509*i^3
  gz = gz -0.00217872057212342*i^4
  gz = gz + 0.000119229497354503*i^5
  gz = gz -0.00000258875126930697*i^6

  m=gz*dt*9.81'***moment N.m
  f4=m/R      '***force N
  a=f4/d      '***accélération m/s²
if i=j then
  ag=a/9.81
  message "accélération à l'arrêt et gz : ", ag, gz
  message "Force F4 : ",f4
end if
  if i<>0 then
    if i = j then '***en premier, le triangle
      t = (2*s/a)^0.5
      v = t*a
    else
      a = a/2
      t = (-v+(v*v+4*a*s)^0.5)/(2*a)'***équation second degré
      v = 2*t*a + v
    end if
  end if
end if

```

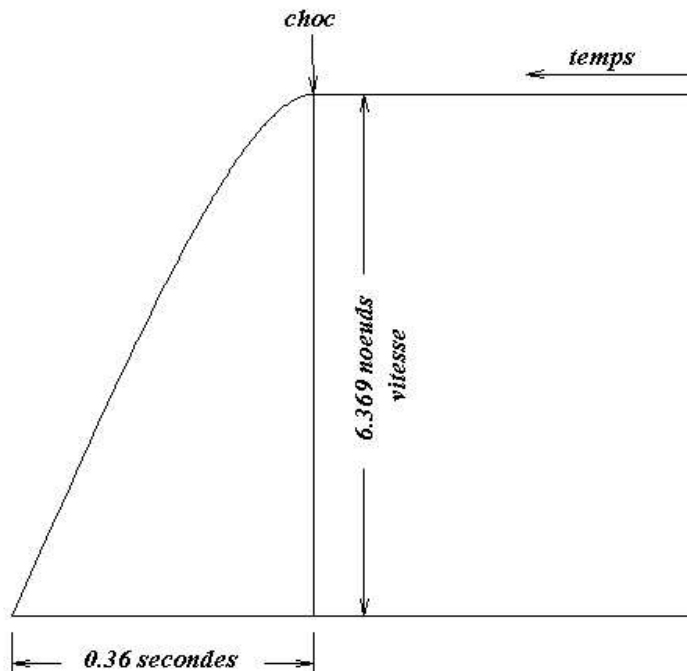
```

vc=v*3600/1852
tt = tt+t
next

message "vitesse à l'impact : ", vc
message "temps total : ",tt

input "refaire (angle d'assiette) ou zéro : ",j
if j<>0 then
  goto 10
end if
end

```



Pour ce bateau, la vitesse initiale serait de 6,36 noeuds nécessaires pour incliner l'assiette de 11° et une décélération de 1,2 g en fin de course.

Cette démarche est largement approximative, elle ignore l'inertie de l'eau qui demande beaucoup d'énergie pour se déplacer si rapidement autour de la carène, les 1,2 g de décélération seraient atteints bien avant les 11° d'assiette, sans que l'on puisse connaître les chiffres avec exactitude.

\*

Cette approche concernait un navire très léger. Qu'en sera-t-il d'un yacht deux fois plus grand ? On peut reprendre les chiffres ci-dessus et les extrapoler à l'échelle 2, tout simplement.

Longueur 24 m

Déplacement  $4269 \times 2^3 = 34152$  kg

Lest  $1000 \times 2^3 = 8000$  kg

Distance entre le CG de la coque et le point d'impact

$3,61 \times 2 = 7,22$  m. Ce qui donnerait un tirant d'eau d'environ 5 mètres. Pour un bateau de cette taille, c'est assez plausible.

La force  $F_{4_{24}}$  serait à calculer de la manière suivante :

$$F_{4_{24}} = \frac{m_{12} \times 2^4}{R_{12} \times 2} = \frac{m_{12} \times 2^3}{R_{12}} \quad (\text{m} = \text{moment de redressement donné par la courbe de stabilité longitudinale) et$$

$$\text{les décélérations } a = \frac{m_{12} \times 2^3}{R_{12} \times D_{12} \times 2^3} = \frac{m_{12}}{R_{12} \times D_{12}}$$

C'est-à-dire que le seul changement concerne la distance parcourue « s » qui est multipliée par deux.

L'aire sous la courbe temps-vitesse est donc doublée,

c'est dire que « t » et « v » sont multipliés par  $\sqrt{2}$

( $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ).

L'exécution du petit logiciel ci-dessus donne une vi-

tesse de 9 nœuds avant l'impact pour atteindre 11° d'assiette au bout de 0,5 secondes et finir avec une décélération de 1,2 g.

Le voilier de 12 m devait marcher à 6,36 nœuds pour atteindre 11° d'assiette au bout de 0,36 secondes et également finir avec une décélération de 1,2 g.

On constate bien que :

$$6,36 \times \sqrt{2} = 9 \text{ nœuds et } 0,36 \times \sqrt{2} = 0,5 \text{ seconde.}$$

La grande différence se tient dans la valeur de la force « F4 » : 31182 kgf contre 4280 kgf... Calculer la structure pour résister à un moment de flexion de 225134 kg.m n'est pas forcément si facile. On imagine 3le varangage nécessaire ou bien la manière dont les renforts doivent être pensés avec une quille « sabre » ! Je ne crois pas qu'un navire de 34 tonnes lancé à 9 nœuds n'aurait pas à souffrir de dégâts irréremédiables si son lest rencontre un caillou par inadvertance.. Ce qui me fait dire qu'il vaut mieux redoubler d'attention quand on navigue sur un navire d'autant plus lourd !

Ces conjectures ne se basent que sur des hypothèses qu'il faudrait vérifier concrètement. Les Normes imposent des chiffres et des formules à toujours prendre avec prudence car le navire en chair et en os ne se soucie guère des Normes quand le vent forçit par exemple à plus de 75 nœuds comme lors de la Route du Rhum de 2002 où presque tous les multicoques ont été décimés.

Voir calculs en fin de volume.....

Ce chapitre avait pour but de montrer combien les estimations ou les hypothèses peuvent être compliquées et difficiles à décider. Un programme d'ordinateur n'abordera pas de lui-même ces questions à la place de l'ingénieur armé de son expérience et de son sens physique des choses qu'il aura acquis en pratiquant la mer durant de longues années dans beaucoup de situations variées.

Les méthodes comparatives sont donc largement utilisées et adoptées dans beaucoup de cas. On se souvient de ce qui a été fait et qui n'a jamais posé de problème.

Mais nous cherchons toujours la solution élégante qui économisera le poids au maximum.

Concevoir un navire ne se résume donc pas à dessiner des formes qui restent abstraites sur papier. L'objet doit voir le jour de manière très précautionneuse, ce qui soulève les questions des compétences. Personne ne se prétend compétent en tout et partout alors des alliances sont nécessaires pour bien faire, à commencer par l'architecte et le chantier naval, puis entre tous les corps de métier.

Il existe des alliances entre des designers et des bureaux d'étude de calculs comme cela se pratique chez les architectes du bâtiment. Cela fonctionne mais j'avoue que la démarche ne me convient pas totalement. Le bureau de calcul ne se soucie pas du devis de poids dans le sens qu'il n'en prend pas la responsabilité. Cela soulève de réelles questions qui amènent à ma conclusion : les hommes doivent travailler de

concert en permanence comme c'est le cas pour de grands navires.

Les petits navires de plaisance qui nous occupent sont facilement étudiés par un seul homme connaissant les rudiments de la science de la résistance des matériaux, la « RDM ».

## **DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX**

... En supposant une solive pareille en tout à la précédente, mais ayant son fardeau au tiers de sa longueur (éloigné de 4 pieds d'un des bouts) : alors sa longueur de 12 pieds ne compte que comme une longueur de 8 pieds. D'après le calcul de la précédente, le produit de la superficie d'un des bouts, par la hauteur, est de 245, qui, au lieu de le diviser par 12, doit être divisé par 8 ; le quotient est de  $30 \frac{5}{8}$ , qui, multiplié par 900, produit 27.562 livres  $\frac{1}{2}$ , poids que peut porter la pièce de bois chargée au tiers de sa longueur.

Cependant, pour le service, il ne faudrait pas charger au poids que l'on calcule la force, parce que la pièce chargée pourrait se rompre et causer des accidents funestes ; on peut la charger à moitié du poids sans craindre aucun danger...

extrait de

VIGNOLE DES MENUISIERS  
Ouvrage théorique et pratique  
utile aux ouvriers, maîtres et entrepreneurs  
par A.G. COULON (1835).

Voilà 184 ans (en 2019) que ces lignes ont été écrites,

depuis la connaissance a progressé. Nous allons tâcher de nous appliquer à démêler ces nœuds en restant pratique.

## Introduction

Que veulent dire et que représentent les formules de la résistance des matériaux ?

Exemple parmi d'autres, « on démontre que » :

$$\sigma = \frac{Mv}{I} \dots\dots\dots$$

À un certain moment, il devient nécessaire de « comprendre » physiquement et intuitivement comment les forces s'articulent dans la matière. Le fait d'appliquer des formules sans en comprendre ni le sens ni le fondement ne m'a jamais satisfait. Je me suis trop souvent heurté au fameux « on démontre que... » sans jamais de démonstration qu'il fallait donc trouver ailleurs dans d'autres ouvrages tout aussi abscons. En un mot, j'ai connu de grandes difficultés dans mes démarches autodidactes à une époque où les informations n'étaient pas aussi disponibles qu'aujourd'hui.

Je résume ici mes tourments et mes cheminements tels que j'aurais aimé les trouver jadis.

On peut se satisfaire des recettes et les appliquer sans se soucier de savoir ce qui se trame dessous, certes, c'est une façon de voir les choses probablement efficace, mais ce n'est pas vraiment satisfaisant. J'ai donc cherché à savoir ce que pouvaient dire ces choses en



bon néophyte curieux.... Et je n'ai rien trouvé d'assez clair à mes yeux.

Alors j'ai commencé par le début du b-a ba vraiment de base comme j'ai pu, à partir d'une feuille blanche ! Il a donc fallu apprendre, découvrir et revenir sur mes petites bases mathématiques mais avec un immense intérêt.

Impression étrange de réinventer ce qui existe déjà. Oui mais pas totalement, car je connaissais les résultats à trouver.

Par ailleurs le bois est un matériau naturel qui se présente avec une orientation de ses fibres dans un sens très privilégié, exactement comme le sera un matériau composé de fibres (de verre, carbone, etc...) toutes alignées dans une seule direction (Uni-directionnel, UD).

De plus le bois ne présente pas de caractéristiques mécaniques stables ; les provenances et les manières de le débiter influent fortement sur ses qualités et sur ses défauts.

Tout cela ne simplifie pas une approche telle qu'on la souhaiterait ; mathématique et rationnelle. Il faudra donc ajouter une dose d'expérience, celle qu'on acquière dans les ateliers et qui sera d'une grande aide pour la conception.

La suite de cet ouvrage aborde certains aspects basique de la résistance des matériaux et ne prétend pas entrer dans une étude qui peut devenir d'une extrême complexité. Je souhaite simplement donner une idée

générale que chacun pourra approfondir grâce à l'aide de nombreux ouvrages très théoriques existant sur le marché.

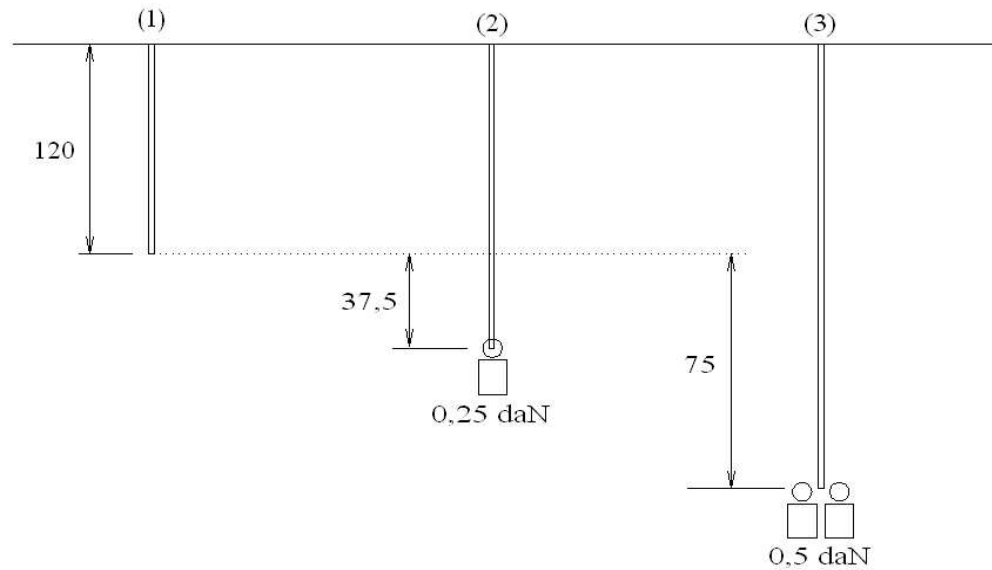
### **Loi de Hooke**

**L**es déformations sont proportionnelles aux contraintes. Par exemple, si on suspend une masse de 1 kg au bout d'un ressort et qu'il s'allonge d'une distance  $d$ , on peut s'attendre à ce qu'il s'allonge de  $2.d$  si on lui suspend une masse de 2 kg.

On conçoit immédiatement que le ressort ne respectera pas indéfiniment cette loi si la charge devient trop importante pour lui.

La loi de HOOKE n'est valable que dans les domaines de l'élasticité de la matière. Si la limite élastique est dépassée, la matière sera irrémédiablement déformée ou tout simplement détruite suivant les caractéristiques du matériau.

En clair, supposons un élastique de section :  $10 \text{ mm}^2$ , et de longueur : 120 mm.



1 - Élastique au repos (son propre poids est négligé) de  $10 \text{ mm}^2$  de section.

2 - Charge  $0,25 \text{ daN}$ , l'élastique s'allonge de  $37,5 \text{ mm}$ , l'allongement sera donc de :  
 $37,5 / 120 = 0,3125 \text{ (i)}$ .

3 - charge  $0,5 \text{ daN}$ , l'élastique s'allonge de  $75 \text{ mm}$ , l'allongement sera donc de :  
 $75 / 120 = 0,625 \text{ (i)}$ .

Entre 2 et 3 la charge a doublé et l'allongement également.

On peut définir une caractéristique constante propre à chaque matériau permettant de prévoir les déformations. Dans notre exemple 2), chaque  $\text{mm}^2$  d'élastique subit une contrainte de  $0,25 / 10 \text{ mm}^2 = 0,025 \text{ daN}$  par  $\text{mm}^2$  ( $\sigma_{\text{traction}}$ ). De toute évidence, plus le matériau sera rigide moins grand sera l'allongement (ou la déformation). On appelle cette caractéristique de rigidité

du matériau le module d'élasticité ou module de YOUNG que l'on nomme traditionnellement : E (exprimé en daN/mm<sup>2</sup> ou N/mm<sup>2</sup>). Ce module est en relation directe avec l'allongement (i) et la contrainte (σ) :

$$i = \frac{\sigma}{E}$$

L'allongement est égal à la contrainte par mm<sup>2</sup> divisé par le module d'élasticité.

Dans notre exemple, nous ne connaissons pas ce module E pour le caoutchouc, mais nous allons pouvoir le calculer puisque  $E = \frac{\sigma}{i}$ , relation déduite directement

$$\text{de } i = \frac{\sigma}{E}$$

Voyons ce qu'il en est de notre élastique.

2)  $i = 0,3125$  et  $t = 0,025$  daN / mm<sup>2</sup>.  
d'où  $E = 0,025 / 0,3125 = 0,08$  daN / mm<sup>2</sup>.

3)  $i = 0,625$  et  $t = 0,05$  daN / mm<sup>2</sup>.  
d'où  $E = 0,05 / 0,625 = 0,08$  daN / mm<sup>2</sup>.

Le module d'élasticité donne une idée de la rigidité du matériau, et non pas de sa « solidité ». A titre d'exemple le module E (daN) de l'acier est d'environ 20.000, le bois entre 500 et 1.500 suivant les essences, l'aluminium 7.000, la fibre de carbone 30.000.... On voit la différence avec l'élastique de caoutchouc.

Nous avons illustré les effets du module d'élasticité pour des contraintes de traction. Les modules en com-

pression se démontrent de la même manière.

Lorsque le matériau n'est plus soumis aux contraintes il revient à sa forme initiale à moins que la limite élastique n'ait été dépassée.

Le Module d'élasticité est donc essentiel pour les calculs de résistance des matériaux. Il permet de prévoir les déformations d'une structure sollicitée et de prévoir la répartition des contraintes dans les matériaux composites.

Les modules E en traction et en compression ne sont pas forcément égaux pour le même matériau, ce qui ne simplifie pas les choses. S'ils sont égaux, on dit le matériau isotrope (cas des métaux en général).

Pour tous les calculs théoriques, on admet que les matériaux sont homogènes, en pratique ce n'est jamais le cas et on en tiendra compte dans les coefficients de sécurité.

Une autre caractéristique du matériau est la contrainte maximum admissible, c'est en général la valeur de la limite élastique exprimée en  $\text{daN/mm}^2$  (ou  $\text{N/mm}^2$ ) d'où l'on estimera la contrainte pratique par  $\text{mm}^2$  à ne pas dépasser. (par exemple  $10 \text{ daN/mm}^2$  pour l'acier suivant le type construction). Cette valeur sera le plus souvent déterminée en fonction de l'expérience acquise.

Pour avancer dans l'étude d'une structure, nous devons considérer divers aspects du problème :

- Les contraintes internes et faire en sorte qu'elles soient admissibles.
- Les déformations, qui elles aussi doivent être admis-

sibles.

Commençons par les contraintes internes.

## TRACTION ET COMPRESSION

Les contraintes de traction se calculent simplement en faisant le quotient de la force appliquée par la surface de la section, comme nous l'avons vu avec l'élastique.

En compression, le problème est le même, tant que la pièce de structure sollicitée ne risque pas de flamber. Nous verrons plus loin ce phénomène.

Malheureusement ce n'est pas complètement aussi simple car la section change de dimension en épaisseur à mesure que l'échantillon s'allonge. Le volume total, surface de base  $\times$  longueur restant le même...

## FLEXION D'UNE POUTRE

Une poutre subissant des effets de flexion est soumise à la fois à des contraintes de traction, de compression et de cisaillement.

Les systèmes que nous étudions sont toujours dans un état d'équilibre, c'est-à-dire que les forces externes (forces appliquées) sont contrebalancées par les forces internes (forces de réaction). Le système se déforme exactement en vertu de la loi de Hooke.

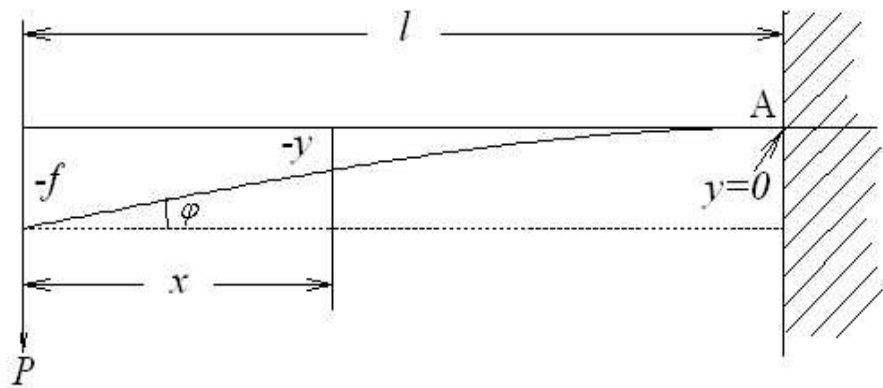
Tous les matériaux sont plus ou moins élastiques. Un matériau infiniment rigide est une abstraction qui n'existe pas.

L'étude a pour but de connaître la valeur des contraintes intérieures et les déformations en fonction de l'échantillonnage choisi ou inversement suivant les cas.

## Flexion pure plane

La flexion pure ne tient pas compte des contraintes et des déformations dues au cisaillement, ce que nous verrons plus loin. Plane : déformation dans le plan vertical uniquement (ou un seul plan).

Une poutre travaillant en flexion est soumise à des contraintes qui dépendent directement des **moments de flexion  $M$** .



Considérons cette poutre encastree en A de longueur  $l$  et supportant un charge  $P$  à la distance  $l$  de A.

La poutre travaille en porte-à-faux, c'est le cas de la console.

Chaque section de la poutre supportera en  $x$  un moment de flexion  $P \cdot x = M(x)$ .

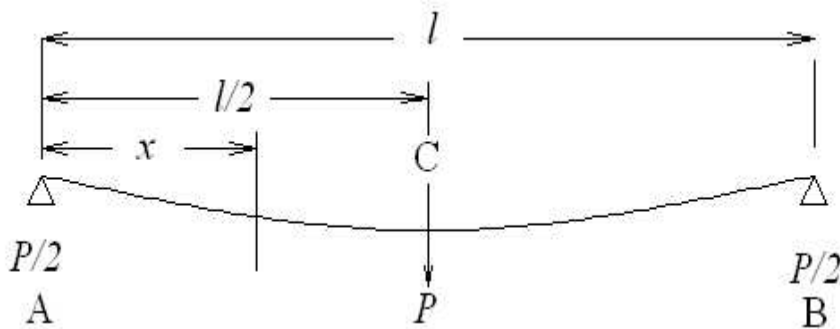
Le moment maximum étant égal à  $Pl$  en A.

Le moment de flexion varie donc linéairement de 0 à  $l$ . On pourra tracer la courbe de la ligne élastique avec le calcul de la flèche à chaque position  $x$ .

Intuitivement on imagine que cette ligne élastique sera dépendante du moment de flexion  $M(x)$  en tous points de la poutre, elle pourra s'écrire comme ceci  $y = f(M)$

et  $M = f(x)$ . Nous verrons cet aspect des choses plus loin.

Revenons aux moments de flexion avec un autre exemple, une poutre appuyée sur deux supports et chargée en son milieu.



Imaginons qu'il s'agisse de 2 consoles opposées et encastrées en C, une console de C à A et une autre de C à B.

Puisque la charge est centrée, la réaction sur les appuis est égale à  $P/2$  en A et  $P/2$  en B.

Les moments  $M$  doivent être calculés pour les deux consoles séparément en deux domaines.

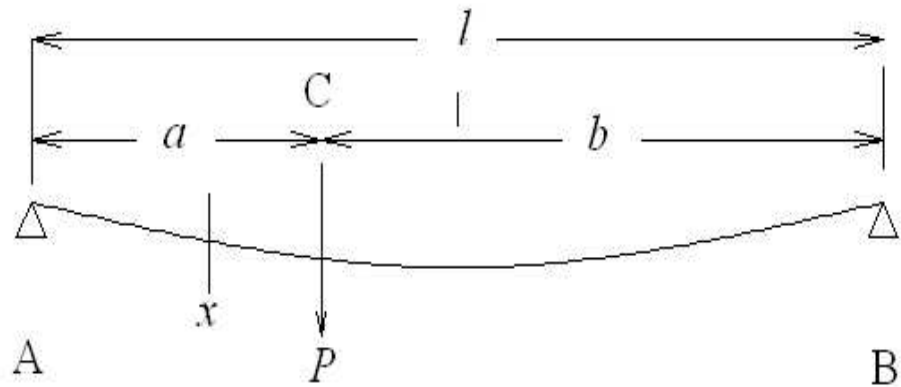
$$\text{De A à C : } M = \frac{Px}{2}$$

$$\text{De C à B : } M = \frac{P(l-x)}{2}$$

$$\text{Le maximum étant : } M_{\max i} = \frac{P}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \text{ en C}$$

Si la charge  $P$  ne se trouve pas au milieu de la portée  $l$  de la poutre :





On commence par calculer la réaction en A (et en B) :

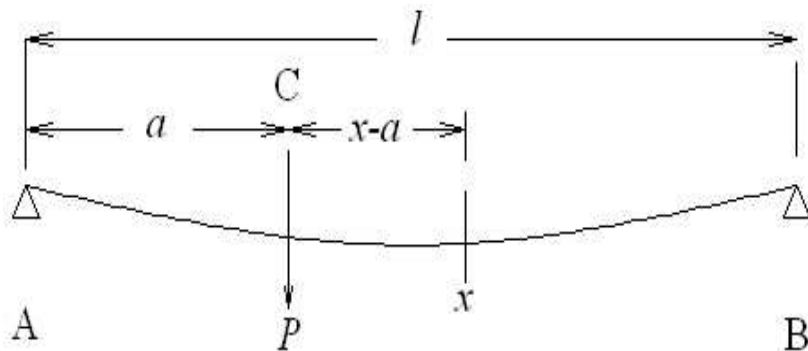
$$R_A = \frac{Pb}{l} \quad \text{et} \quad R_B = \frac{Pa}{l}$$

Les moments sont à calculer pour les deux domaines.

- De A à C :  $M = \frac{Pbx}{l}$

- De C à B :  $M = \frac{Pa(l-x)}{l}$  (1)

On peut également calculer  $M$  de cette manière dans le domaine de C à B :



À la position  $x$ , la poutre est soumise à deux moments de sens contraires :

1 :  $+ R_A x$

2 :  $- P(x-a)$

Le total étant  $M = R_A x - P(x-a)$

$$\text{Comme } RA = \frac{P(l-a)}{l} \Rightarrow M = \frac{Px(l-a)}{l} - P(x-a)$$

$$M = \frac{Pxl - Pxa - Pxl + Pla}{l} = \frac{P(xl - xa - xl + la)}{l}$$

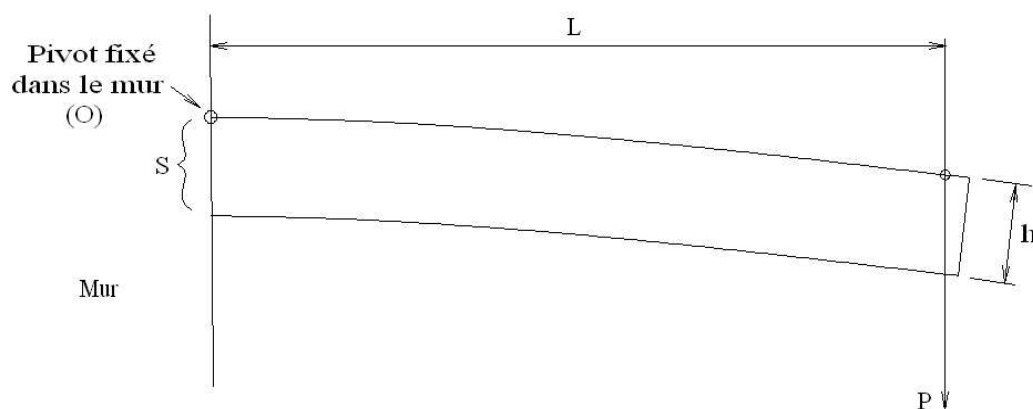
$$M = \frac{P(-xa + la)}{l} = \frac{Pa(l-x)}{l} \quad \text{identique à (1).}$$

Voilà pour le principe général du calcul des moments de flexion. Tous les cas de figure avec des charges et des appuis différents trouvent leur solution.

Les charges combinées déterminent des moments indépendants qui s'ajoutent les uns aux autres.

## Les contraintes

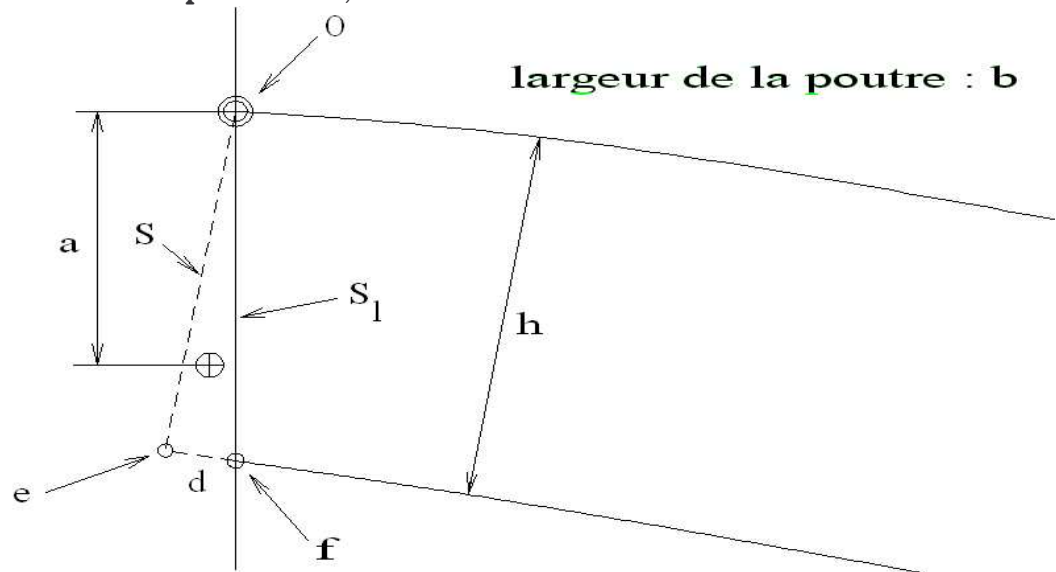
Imaginons une poutre rectangulaire de longueur  $L$ , de hauteur  $h$  et de largeur  $b$ , montée comme ceci :



La poutre est chargée d'un poids (force)  $P$  à la distance  $L$  de  $O$ . Elle peut pivoter autour de  $O$  mais s'appuie sur le mur de toute la surface de sa section ( $S$ ).

Toutes les "fibres" situées sous le point  $O$  sont donc soumises à des contraintes de compression et vont subir une déformation, un "tassement" dont l'amplitude

sera directement proportionnelle à la contrainte (Loi de Hooke) et inversement proportionnelle au module  $E$  en compression, comme nous venons de le voir.



La surface  $S$  ( $h.b$ ) va donc se comprimer et venir en  $S_1$ , le point (e) venant en (f) après s'être déplacé de la distance  $d$ .

Nous admettons que le mur ne se déforme pas et que la surface  $S_1$  reste plane.

Par rapport au point O, le moment de flexion  $M = P.L$  que subit la poutre est équilibré par un moment égal et de sens inverse  $R.a$ .

$R$  : Somme des forces réparties sur la surface  $S$ .

$a$  : bras de levier allant de O jusqu'au centre de gravité de la somme des forces  $R$ . (Le barycentre).

Si on admet le fait que  $S_1$  reste plane après déformation, alors on doit aussi admettre que les forces se répartissent triangulairement avec un minimum au point O et un maximum au point (f).

La position du barycentre de ces forces dépendra évidemment de la forme de la section de la poutre.

Dans notre exemple, la largeur  $b$  est constante et le centre de gravité du volume  $O - e - f$ , de largeur  $b$  sera situé à  $2.h / 3$  de  $O$  ( $1 / 3$  de la hauteur du triangle en partant de la base, définition même du centre de gravité d'un triangle).

Puisque les déplacements dus aux déformations sont proportionnels aux contraintes, on peut donner une valeur au "volume en coin"  $O-e-f$  de largeur  $b$  égal à la somme des forces  $R$  de réaction.

La force  $R$  sera égale au volume du coin  $h.b.d / 2$ , en remplaçant  $d$  par la contrainte  $\sigma$  correspondante à cet endroit, entre (e) et (f),  $d = \sigma$ , on aura :

$$R = \frac{h.b.\sigma}{2} \quad (\text{Volume du "coin"})$$

Sachant que  $a = 2.h / 3$ , le produit  $R.a = M$  peut s'écrire :

$$M = \frac{hb\sigma}{2} \times \frac{2h}{3} = \frac{h^2b\sigma}{3}$$

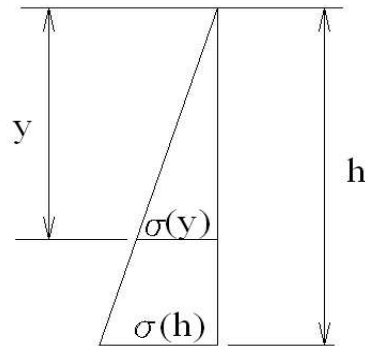
d'où l'on déduit la contrainte au point (f), à la distance  $h$  de  $O$ , c'est-à-dire à la fibre la plus éloignée de  $O$  :

$$\sigma(h) = \frac{3M}{h^2b} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{(h^2.b)/3}$$

Si on désire connaître la valeur de la contrainte ( $\sigma$ ) à la distance  $y$  de  $O$ , on la déduira par proportionnalité :

$$\sigma(y) = \frac{\sigma(h)y}{h} \quad \text{suivant le théorème de THALES tout}$$

simplement.



Soit, pour un calcul plus direct :

$$\sigma(y) = \frac{3M}{h^2 b} \times \frac{y}{h}$$

$$\sigma(y) = \frac{3My}{h^3 b} \quad \text{ou} \quad \frac{My}{(h^3 \cdot b) / 3}$$

$h^3 \cdot b / 3$  est la valeur du moment d'inertie du rectangle ( $h \cdot b$ ) par rapport à l'axe z (passant par O, perpendiculaire au papier) :

$$\frac{h^3 b}{3} = I_z$$

La fibre la plus sollicitée sera évidemment celle qui sera la plus éloignée de O, à la distance traditionnellement notée  $v$  d'où :

$$\sigma(\max) = \frac{Mv}{I} \quad \text{ou} \quad \sigma(\max) = \frac{M}{(I/v)}$$

$I/v$  est appelé module de résistance de la section.

Ainsi, il suffit de connaître le  $I/v$  de la section pour avoir une caractéristique du "pouvoir de résistance" de la section. Ce module va donc dépendre directement de la géométrie de la section et comme on peut s'y attendre, la hauteur ( $h$ ) est plus déterminante ( $h^2$ ) que la largeur ( $b$ ).

Cette valeur peut être calculée directement, en particulier pour le rectangle qui nous occupe :

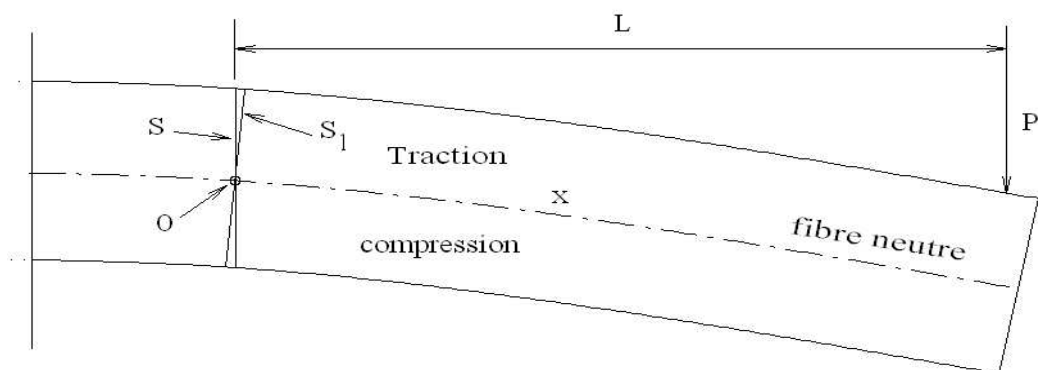
$$I = \frac{h^3 b}{3} \text{ et } v = h \text{ donc } \frac{I}{v} = \frac{h^2 b}{3}$$

La contrainte maxi par unité de surface sera égale à :  $M / (I / v)$ . ( $v$  étant la distance de la fibre la plus éloignée de la fibre neutre). Pour connaître la contrainte à la distance  $y$  de la fibre neutre, il suffit d'appliquer la formule :

$$\sigma(y) = \frac{My}{I}$$

Notre exemple est très simple, les surfaces des sections de poutre ne sont pas toujours rectangulaires et le point O n'existe pas dans la réalité.

Prenons un exemple plus réaliste, toujours avec une poutre rectangulaire :



Isolons une section  $S$  à la distance  $L$  du point d'application de la charge  $P$ . Cette section sera donc soumise

au moment de flexion :

$M = P.L$  comme précédemment.

Nous gardons comme acquise l'hypothèse de NAVIER-BERNOUILLI qui précise que la surface  $S$  reste plane après déformation, lorsqu'elle vient en  $S_1$ , c'est-à-dire qu'elle pivote autour de l'axe où les contraintes sont nulles.

Cette hypothèse n'est pas totalement exacte, en particulier en raison des déformations dues au cisaillement mais l'approximation reste toutefois suffisamment valable pour être praticable

Le moment  $M$  se divisera en 2 parties égales ( $M / 2$ ) et se répartira pour une partie en traction et une partie en compression autour de  $O$ . Ce couple de forces internes permet au système de rester en équilibre (dans la mesure où le matériau le supporte...).

“ $O$ ” se situera donc à un endroit où les contraintes sont nulles, sur la fibre neutre de la section (l'axe des  $x$ ).

Si le matériau est isotrope et la section rectangulaire (ou symétrique par rapport à son centre de gravité) alors les inerties des parties de section soumises à traction et à compression seront nécessairement égales et l'équilibre à l'intérieur de la poutre s'effectuera comme ceci :

$I_t = I_c$ . ( $I$  compression =  $I$  traction, pour un matériau isotrope).

$I_c$  par rapport à O :

$$I_c = \frac{(h/2)^3 b}{3} = \frac{(h^3/8)b}{3} = \frac{h^3 b}{24}$$

$I_t + I_c = \frac{2h^3 b}{24} = \frac{h^3 b}{12}$  = inertie totale de la section par rapport à O.

Calcul de la contrainte maximum :

Le moment de flexion se divise en 2 parties comme expliqué plus haut et la contrainte maximum de traction (ou de compression) sera :

$$I_c = \frac{(h/2)^3 b}{3} = \frac{(h^3/8)b}{3} = \frac{h^3 b}{24} \quad (2)$$

Si on se réfère maintenant à la surface totale :

$h/2$  représente  $v$  : distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre.

$h^3 \cdot b / 24$  représente  $I_{total} / 2$

$M/2$  est le  $1/2$  moment de flexion.

$$(M/2) / (I/2) = M/I$$

La formule (2) est donc bien équivalente à

$$\frac{M}{\left(\frac{I}{v}\right)} \text{ ou } \frac{Mv}{I}$$

qui donne la valeur  $\sigma$  de la contrainte maximum sur

la fibre la plus éloignée :  $\sigma = \frac{Mv}{I}$

En résumé :

$M$  : moment de flexion total.

$I$  : inertie totale par rapport au centre de gravité. (fibre



neutre).

$v$  : distance de la fibre la plus éloignée de la fibre neutre.

Ce qui correspond exactement au résultat de l'exemple précédent lorsque la section de la poutre était entièrement soumise à compression.

Ce calcul n'est valable que si la section est symétrique par rapport au CG et si le matériau est isotrope.

Avant d'avancer plus loin, nous devons nous arrêter sur le moment d'inertie des surfaces.

\*

### **Moment d'inertie des surfaces quelconques**

La théorie à partir d'une section rectangulaire est évidemment trop limitative, il nous faut l'étendre à toutes formes de sections.

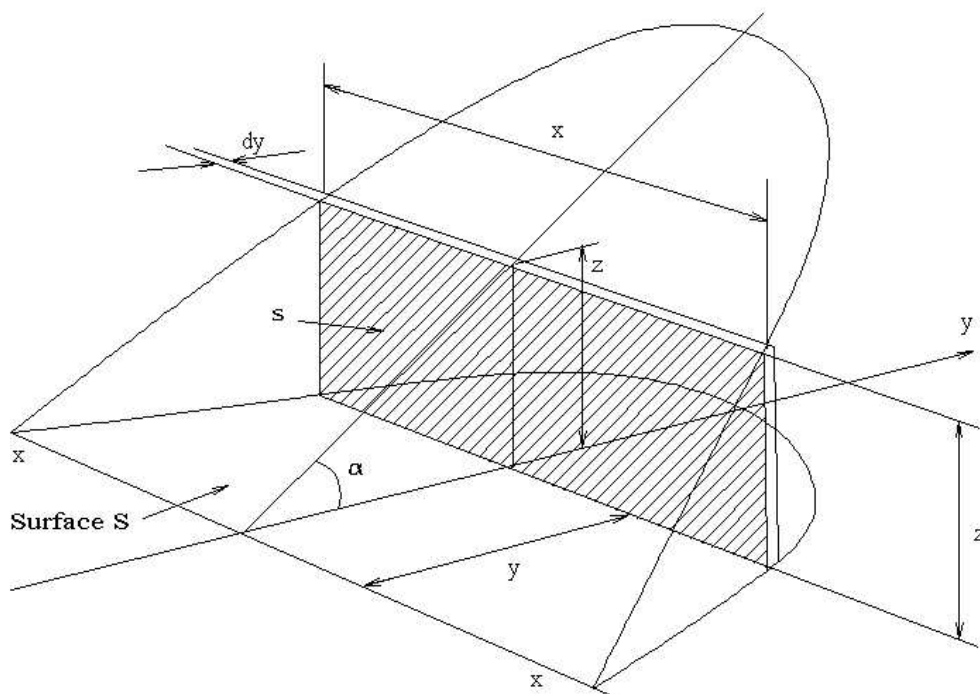
Le moment d'inertie d'une surface est la somme des surfaces élémentaires infiniment petites ( $ds$ ) qui compose cette surface multipliées par les carrés des distances ( $r$ ) qui les séparent de l'axe de référence :

$$I = \int ds.r^2$$

Cette définition est un peu abstraite... Notre problème est de comprendre à quoi elle peut nous servir et à quoi elle correspond. Nous avons vu dans notre premier exemple, que la surface  $S$  était la base d'un vo-

lume "en coin", que ce volume était la représentation proportionnelle de la répartition des forces de réaction ( $R$ ) à l'intérieur de la poutre et que si ( $a$ ) est le bras de levier qui va de  $O$  au centre de gravité du volume "en coin", le produit  $R.a$  est le moment *égal et de sens contraire au moment de flexion* ( $P.L$  dans notre exemple).

Par analogie, le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe est le moment du volume illustré ci-après par rapport au même axe. Le moment d'un volume par rapport à un axe étant le produit du volume par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré ( $x$ ). C'est ce produit qui nous intéresse au premier chef car au facteur de proportionnalité près, il sera égal au moment de flexion.



Pour simplifier, prenons  $\alpha = 45^\circ$  ce qui donne  $\tan(\alpha) = 1$ , soit pour chaque valeur de  $y$ ,  $z = y$ .

Moment de la surface  $s$  par rapport à l'axe :  $s.y$

comme  $s = z.x$  et  $y = z$  donc  $s = y.x$

et le moment de  $s = y.y.x = y^2.x$

L'intégration pour tout le volume (de 0 à  $v$ ) donnera le moment du volume ou le moment d'inertie de la surface  $S$  par rapport à l'axe :

$$I_{axe} = \int y^2 x . dy$$

$x$  est fonction de  $y$ . Si  $x$  est constant ( $S$  rectangle) et égal à  $b$ , on a :

$$I = \int b . y^2 . dy = b . y^3 / 3$$

et  $I = b . v^3 / 3$  pour toute la surface si  $v$  est égal à la dimension maximum de  $y$ .

L'inertie de la surface  $S$  est égale au moment du volume "en coin" dont la base est la surface  $S$ , par rapport à l'axe.

Le volume  $V$  de ce "coin" est égal à :

$$V = \int_0^b z . x . dy, \text{ comme } z = y; \quad V = \int_0^b yx . dy$$

Si  $x$  est constant ( $S$  rectangle) et égal à  $b$ , on a

$$V = \frac{y^2 b}{2}$$

Ce volume correspond au moment ( $m$ ) de la surface  $S$  par rapport à l'axe, et le CG de ce volume sera à la distance  $I / m$  de l'axe.

En résumé :

$I =$  inertie de  $S$  (moment du "volume en coin")

$m$  = moment de la surface S (volume du "volume en coin")

$I / m$  = distance du centre de gravité du "volume en coin".

Nous avons pris  $\alpha = 45^\circ$  par simplification. Si  $\alpha$  est différent de  $\tan(45)$  alors :

$$k = \tan(\alpha) \text{ et } z = k.y$$

L'équation du volume "en coin" devient :

$$I_{axe} = \int_0^b k.y.y.x.dy = k \int y^2 x.dy$$

$$\text{Si } x \text{ est constant et égal à } b : I_{axe} = \frac{k.y^3.b}{3}$$

Si  $k$  est précisément le facteur qui rend l'inertie de la surface égale au moment de flexion  $M$ , soit

$$k = M / I$$

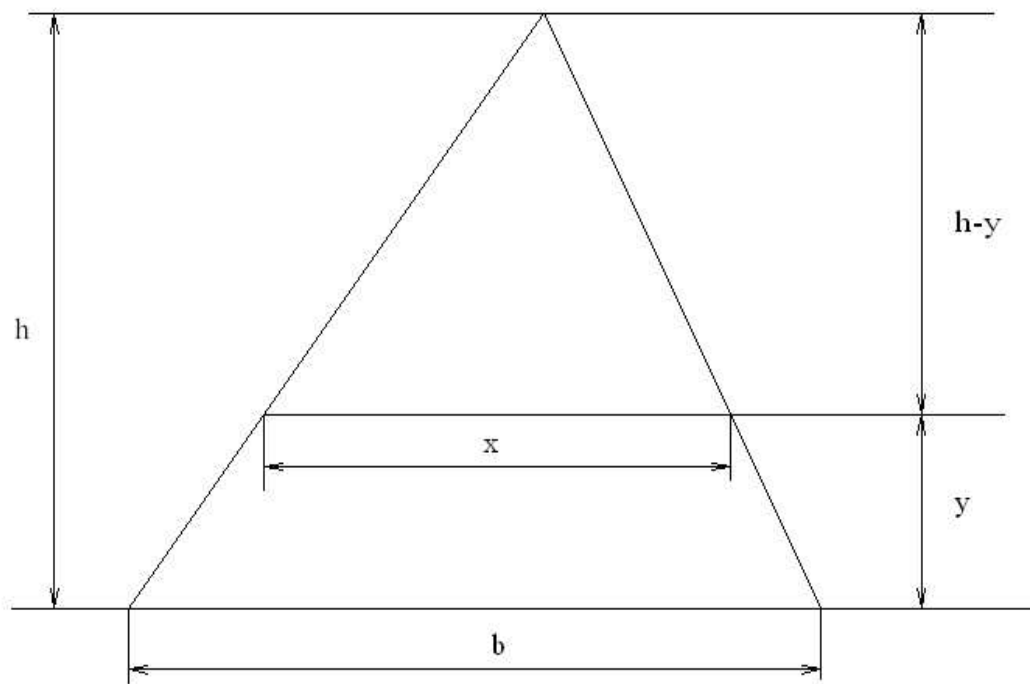
D'autre part  $z = k.y$  donc  $z = M.y / I$ .

$z$  est la valeur de la contrainte ( $\sigma$ ) à la distance  $y$  de l'axe d'où :

$$\sigma = M / (I / y) \text{ et } \sigma(\max) = M / (I / v) \text{ lorsque } y = v.$$

Nous sommes revenus aux conclusions précédentes en partant du calcul des inerties de surfaces quelconques.

Pour illustrer ce passage, nous calculons le moment d'inertie d'un triangle par rapport à sa base suivant le schéma ci-dessous :



La relation entre  $x$  et  $y$  est la suivante :

$$\frac{h}{h-y} = \frac{b}{x} \quad (\text{THALES})$$

d'où :  $hx = b(h-y)$  et  $x = \frac{b}{h} \times (h-y)$

ou encore :  $x = b - \frac{by}{h}$

Maintenant  $I_b = \int_0^y y^2 \cdot x \cdot dy$  (formule générale)

en remplaçant  $x$  par sa valeur :

$$I_b = \int_0^y y^2 \left( b - \frac{by}{h} \right) dy$$

$$I_b = \int_0^y \left( y^2 b - \frac{by^3}{h} \right) \cdot dy$$

$$I_b = b \int_0^y y^2 \cdot dy - \frac{b}{h} \int_0^y y^3 \cdot dy$$

$$I_b = \frac{by^3}{3} - \frac{by^4}{4h} = \frac{4bhy^3 - 3by^4}{12h}$$

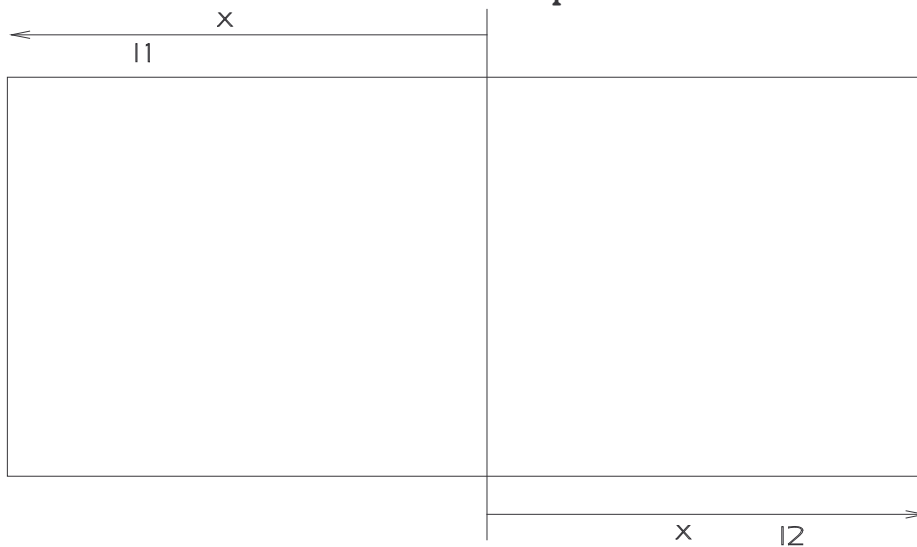
En donnant à  $y$  la valeur de  $h$  pour tout le triangle :

$$I_b = \frac{4bh^4 - 3bh^4}{12h} = \frac{bh^3}{12}$$

Voyons maintenant les méthodes pratiques pour calculer les moments d'inertie des surfaces par rapport à un axe.

Restons avec notre analogie des volumes "en coin" qui se révèle assez pratique pour illustrer les moments d'inertie des surfaces, même lorsque le moment d'inertie doit être calculé par rapport à un axe éloigné de la surface.

1 - L'axe de référence est choisi passant sur la surface :



Les inerties des surfaces réparties de part et d'autre de l'axe (x) doivent être ajoutées. Cette somme sera égale à l'inertie totale de la surface par rapport à cet axe (x) :

$$I_x = I1_x + I2_x$$

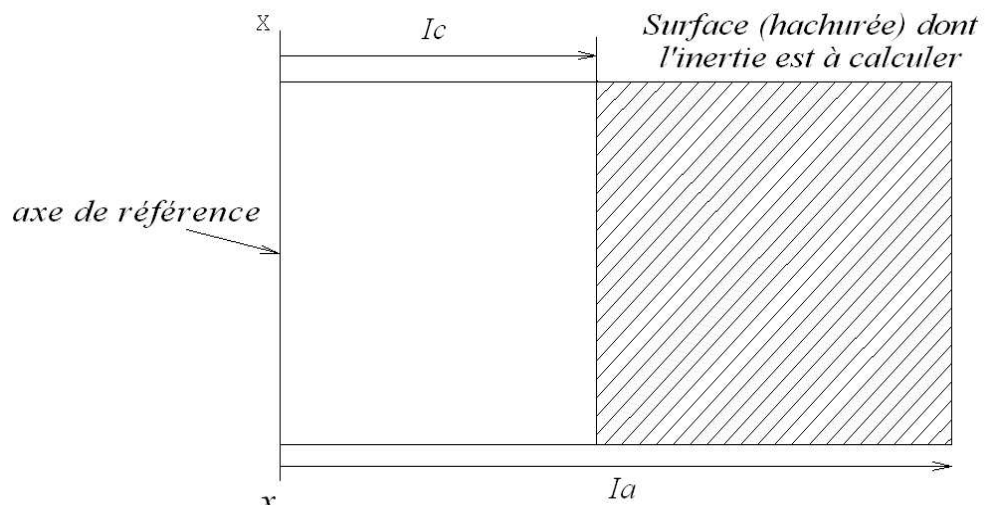
Lorsque la surface est symétrique par rapport à cet axe (ce qui sera souvent le cas, on calculera directement l'inertie totale car dans ce cas  $I1_x = I2_x$  ou  $2.I1_x$  Par exemple, pour le rectangle de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  :

$$I1_x = \frac{(h / 2)^3 b}{3} \text{ et } 2I1_x = \frac{h^3 b}{12}$$

2 - l'axe de référence est situé en dehors de la surface.

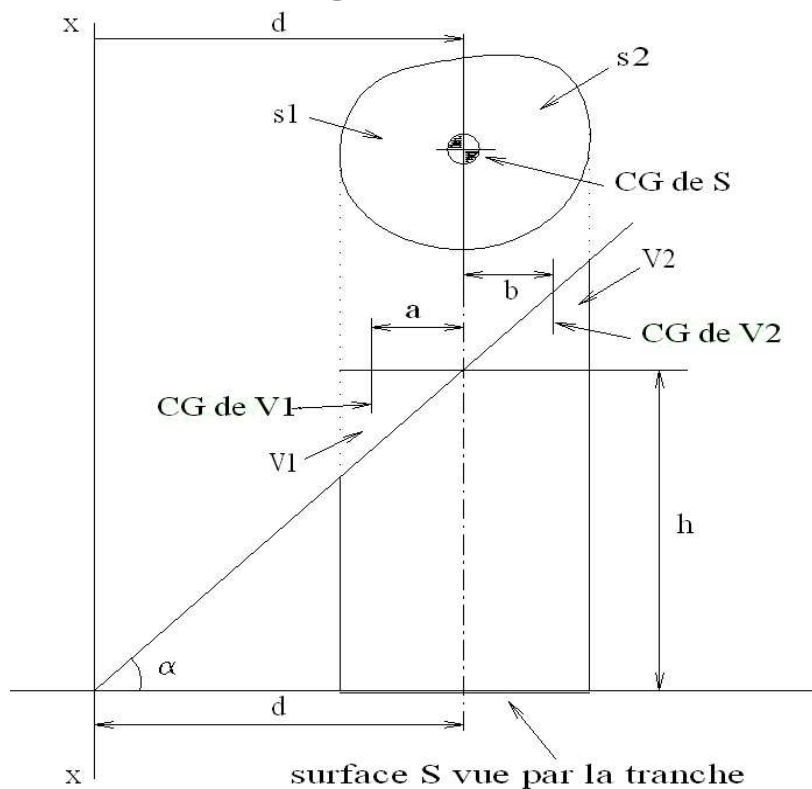
On peut calculer l'inertie de 2 manières :

a) en faisant la soustraction de  $I_a - I_c$  comme sur la figure suivante :



b) par le théorème de STEINER :  $I_x = I_{cg} + S.d^2$   
 l'inertie de S par rapport à (x) est égale à l'inertie de S par rapport à l'axe cg (parallèle à x) passant par le centre de gravité de S augmenté du produit de la surface de S par la distance  $d$  au carré.  
 $d$  = distance entre (x) et (cg).

Reprenons notre analogie des "volumes en coin" :



Si  $(a) = \tan(45) = 1$ ,  $h$  est égal à  $d$  et le volume de base  $S$  et de hauteur  $h$  est égal à  $S.h$  ou à  $S.d$ .

Moment de ce volume par rapport à (x) :

$$\mathbf{S.d.d = S.d^2}$$

Il faut maintenant ajouter le moment du volume  $V_2$  et soustraire le moment du volume  $V_1$  (toujours par rap-



port à  $x$ ).

Considérons maintenant la surface  $S$  que l'on peut diviser en deux parties  $s_1$  et  $s_2$  de part et d'autre d'un axe passant par le CG de  $S$ .

Les moments statiques de  $s_1$  et  $s_2$  par rapport au cg sont obligatoirement égaux car ce fait a déterminé la position du centre de gravité de  $S$ .

Comme nous l'avons vu, le moment d'une surface est égal au volume du "volume en coin", on en déduit donc obligatoirement que  $V_1 = V_2$ , puisque les moments statiques de  $s_1$  et  $s_2$  sont égaux comme nous venons de le voir.

D'autre part l'inertie de  $s_1 = V_1 \cdot a$ , dans lequel  $a$  = distance du centre de gravité de  $V_1$  à l'axe (cg) et l'inertie de  $s_2 = V_2 \cdot b$ .

l'inertie totale de  $S$  par rapport à (cg) sera donc égal à :  
 $V_1 \cdot a + V_2 \cdot b$

Comme  $V_1 = V_2$ ,  $I_{cg}$  de  $S = V_1 \cdot (a + b)$

Pour finir la démonstration du théorème de STEINER, nous devons connaître les moments de  $V_1$  et  $V_2$  par rapport à  $(x)$  puisque nous devons les ajouter algébriquement à  $S \cdot d^2$ .

$$m_x V_1 = V_1 \cdot (d - a) \text{ et } m_x V_2 = V_2 \cdot (d + b)$$

$$\text{ou } m_x V_1 = V_1 \cdot (d + b) \text{ puisque } V_1 = V_2$$

L'inertie de S par rapport à (x) sera donc :

$$I_x = S.d^2 - V_1.(d - a) + V_1.(d + b) \text{ d'où :}$$

$$I_x = S.d^2 + V_1.(a + b)$$

$V_1.(a + b) = I_{cg}$  de S comme nous l'avons vu plus haut.

Finalement  $I_x = I_{cg} + S.d^2$ . Ce qu'il fallait démontrer.

\*

Revenons un instant sur le moment d'inertie d'un triangle quelconque.

Nous avons trouvé que le moment d'inertie par rapport à la base était égale à

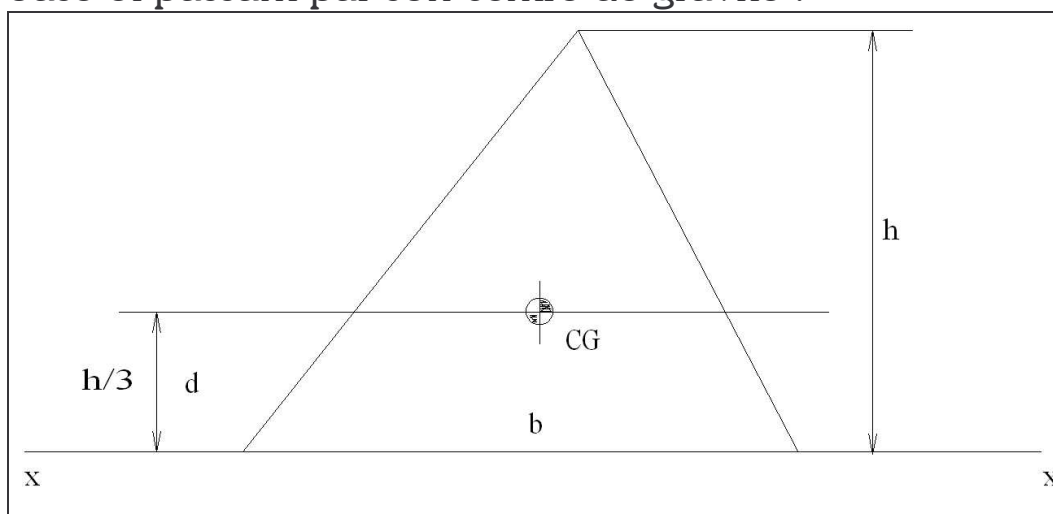
$b.h^3 / 12$ . En fonction du théorème de STEINER :

$$I_x = I_{cg} + S.d^2$$

soit de la même manière :

$$I_{cg} = I_x - S.d^2$$

ce qui va nous permettre de calculer le moment d'inertie du triangle par rapport à un axe parallèle à une base et passant par son centre de gravité :



$$I_b = I_{cg} + Sd^2$$

$$d = \frac{h}{3} \text{ et } d^2 = \frac{h^2}{9}$$

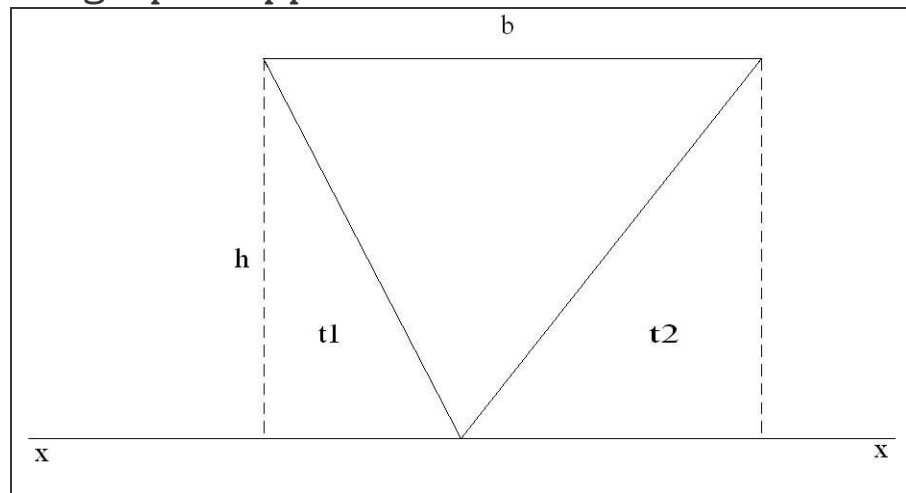
$$S = \frac{bh}{2} \Rightarrow Sd^2 = \frac{bh}{2} \times \frac{h^2}{9} = \frac{bh^3}{18}$$

on déduit  $I_{cg}$  :

$$I_{cg} = I_b - Sd^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18}$$

$$I_{cg} = \frac{3bh^3}{36} - \frac{2bh^3}{36} = \frac{bh^3}{36}$$

Pour finir, calculons rapidement le moment d'inertie du triangle par rapport à son sommet :



Nous avons un rectangle (b.h) dont l'inertie est égale à :

$b.h^3 / 3$  par rapport à l'axe xx.

De l'inertie de ce rectangle, il faut soustraire les inerties des triangles t1 et t2, ce qui revient à soustraire l'inertie du triangle de hauteur h et de base b ( $b.h^3 / 12$ , nous l'avons vu).

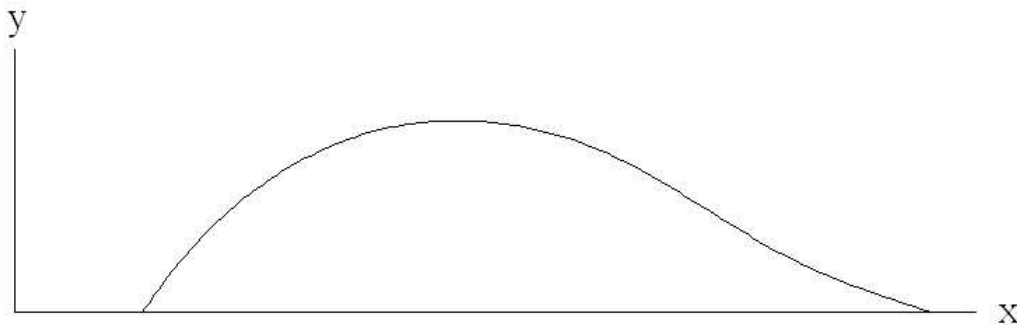
donc :

$$I_x = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} \text{ ou } \frac{4bh^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

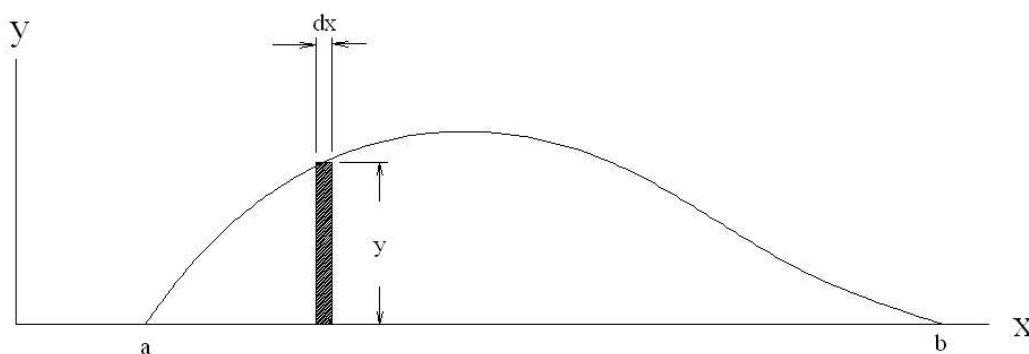
ce qui donne :  $\frac{3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}$

## Moment d'inertie de surfaces quelconques

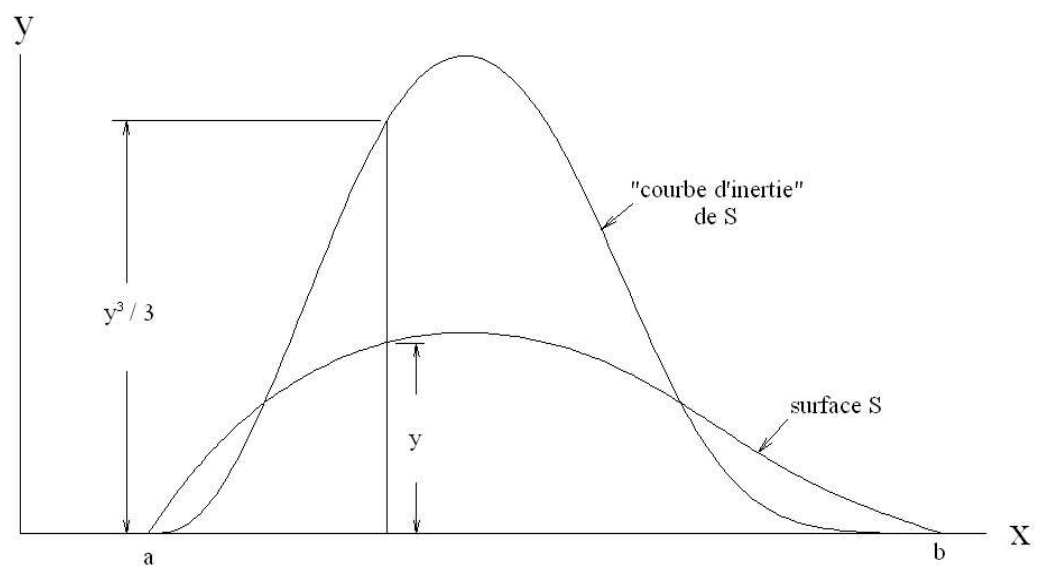
La surface dont le moment d'inertie à rechercher peut être délimitée par une courbe dont la fonction est inconnue comme celle-ci par exemple :



Une méthode simple consiste à effectuer une intégration "graphique". Prenons une "tranche" de la surface d'épaisseur (infinitement petite)  $dx$  :



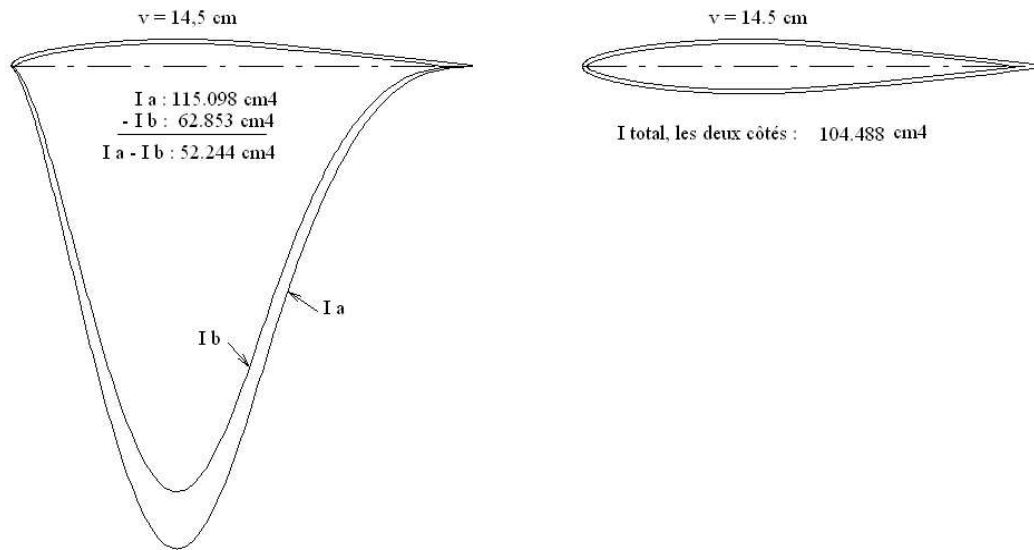
Le moment d'inertie du rectangle noir par rapport à l'axe XX est donc égal à :  $y^3 \cdot dx / 3$  comme nous l'avons vu plus haut pour un rectangle. L'inertie de la surface totale sera donc égale à la somme des inerties de tous les rectangles infiniment minces suivant la courbe entre a et b. Nous pouvons tracer une "courbe d'inertie" qui correspond à tous les  $y^3 / 3$  :



L'aire mesurée sous la "courbe d'inertie" correspond au moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe XX.

### Exemple chiffré

Soit un profil de "quille" en acier d'une épaisseur de 29 cm, constitué de tôles de 6 mm, soumis à un moment de flexion de 1.500.000 daN.cm (3750 daN à 400 cm)



Les deux “courbes d’inertie” Ia et Ib correspondent à l’épaisseur de la tôle. On doit donc soustraire Ib de Ia pour obtenir l’inertie de la tôle par rapport à XX. Le double de cette valeur donne finalement l’inertie totale des deux côtés. La “fibre” (v) la plus éloignée de la fibre neutre, à 14,5 cm sera la plus sollicitée :

$$\sigma(v) = \frac{Mv}{I} \text{ ou } \frac{M}{(I / v)}$$

et  $\sigma(v) = 1.500.000 \times 14,5 / 104.488 = 208.15 \text{ daN} / \text{cm}^2$  ou  $2,08 \text{ daN} / \text{mm}^2$  ce qui est insignifiant pour de l’acier dont la limite élastique se situe au-dessus de  $20 \text{ daN} / \text{mm}^2$  suivant les nuances. (en supposant que l’intégrité géométrique soit préservée).

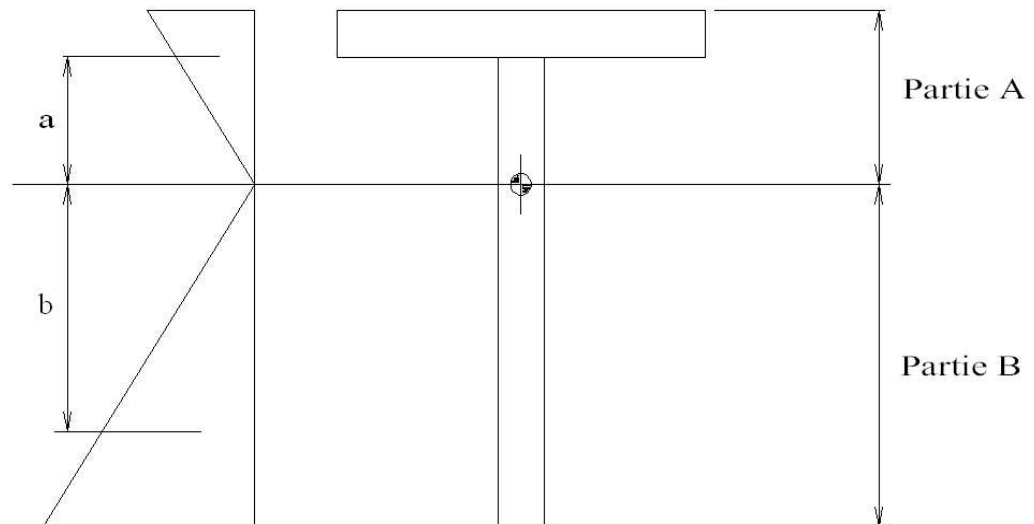
Nous avons vu que le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe était égal au moment du "volume en coin" par rapport au même axe. Le problème peut être de déterminer la position de cet axe qui doit se situer à l'endroit de la fibre neutre de la poutre soumise à des efforts de flexion.

Si le matériau est isotrope, l'inertie de la surface soumise à la traction doit être égale à l'inertie de la surface soumise à la compression (équilibre des forces internes).

Si la section est symétrique par rapport à son centre de gravité, la condition se vérifie automatiquement en positionnant la fibre neutre sur un axe passant sur le CG de la section.

\*

### Section asymétrique



La position de la fibre neutre devrait satisfaire la condition suivante : l'inertie de la partie A égale à l'inertie de la partie B, question d'équilibre dans la répartition des contraintes en traction et en compression. Essayons de prendre comme axe de référence celui qui passe par le CG de la section, dans ce cas le moment de A doit être égal au moment de B puisque

cette égalité a déterminé la position du CG de la section. Ceci revient à dire que les volumes des "volumes en coin" sont égaux soit :

$$V_A = V_B$$

L'inertie de la partie A par rapport au CG sera donc :

$$V_A \cdot a$$

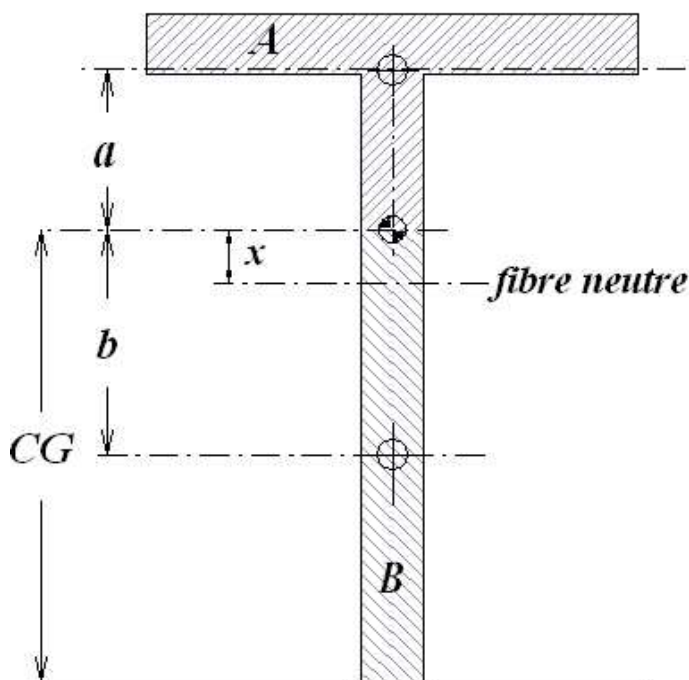
et l'inertie de la partie B sera :  $V_B \cdot b$

Comme  $V_A \cdot a$  doit être égal à  $V_B \cdot b$  et que  $V_A = V_B$ ,

il ressort obligatoirement que (a) doit être égal à (b), ce qui est impossible. Seule une section symétrique peut satisfaire ces conditions.

Les sections asymétriques n'ont pas obligatoirement leur fibre neutre passant sur le centre de gravité de la section.

Calcul de la position de la fibre neutre :





La position de la fibre neutre devrait vérifier l'égalité :  
 $I_A = I_B$  (égalité des raideurs)

La position de la fibre neutre au départ est décidée a priori, par exemple au CG de toute la surface A + B.  
 On peut chercher la valeur x d'un décalage de l'axe, qui donnera l'égalité des inerties des deux parties A et B comme ceci en utilisant la formule de Steiner :

$$I_{Acg} + S_A a^2 = I_{Bcg} + S_B b^2$$

Avec :

$I_{Acg}$  et  $I_{Bcg}$  : Inertie des parties A et B par rapport à leur centre de gravité géométrique.

$S_A a^2$  et  $S_B b^2$  : aire des parties A et B multipliée par la distance  $a^2$  et  $b^2$  de l'axe de référence.

Décalons l'axe neutre de la valeur x afin d'estimer une approche de l'égalité recherchée.

$$I_{Acg} + S_A (a + x)^2 = I_{Bcg} + S_B (b - x)^2$$

$$I_{Acg} + S_A (a^2 + x^2 + 2ax) = I_{Bcg} + S_B (b^2 + x^2 - 2bx)$$

$$I_{Acg} + S_A a^2 + S_A x^2 + 2S_A ax = I_{Bcg} + S_B b^2 + S_B x^2 - 2S_B bx$$

comme  $I_{Acg} + S_A a^2 = I_{Aaxe-réf}$

et  $I_{Bcg} + S_B b^2 = I_{Baxe-réf}$

donc  $I_{Aaxe-réf} - I_{Baxe-réf} + S_A x^2 - S_B x^2 + 2S_A ax + 2S_B bx = 0$

$$\text{et } x^2(S_A - S_B) + 2x(S_A a + S_B b) + I_{A\text{axe-réf}} - I_{B\text{axe-réf}} = 0$$

Equation du second degré de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec :}$$

$$a = S_A - S_B \dots\dots\dots \text{Différence des surfaces}$$

$$b = 2(S_A a + S_B b) \dots\dots\dots \text{Double somme des moments des surfaces}$$

$$c = I_{A\text{axe-réf}} - I_{B\text{axe-réf}} \dots\dots \text{Diff. des Inerties/axe-réf}$$

$$x = \frac{(\sqrt{(b^2 - 4ac)} - b)}{2a} \text{ (notes en fin de volume)}$$

Puis on décale l'axe de la nouvelle valeur de x avec son signe avant de relancer le calcul.

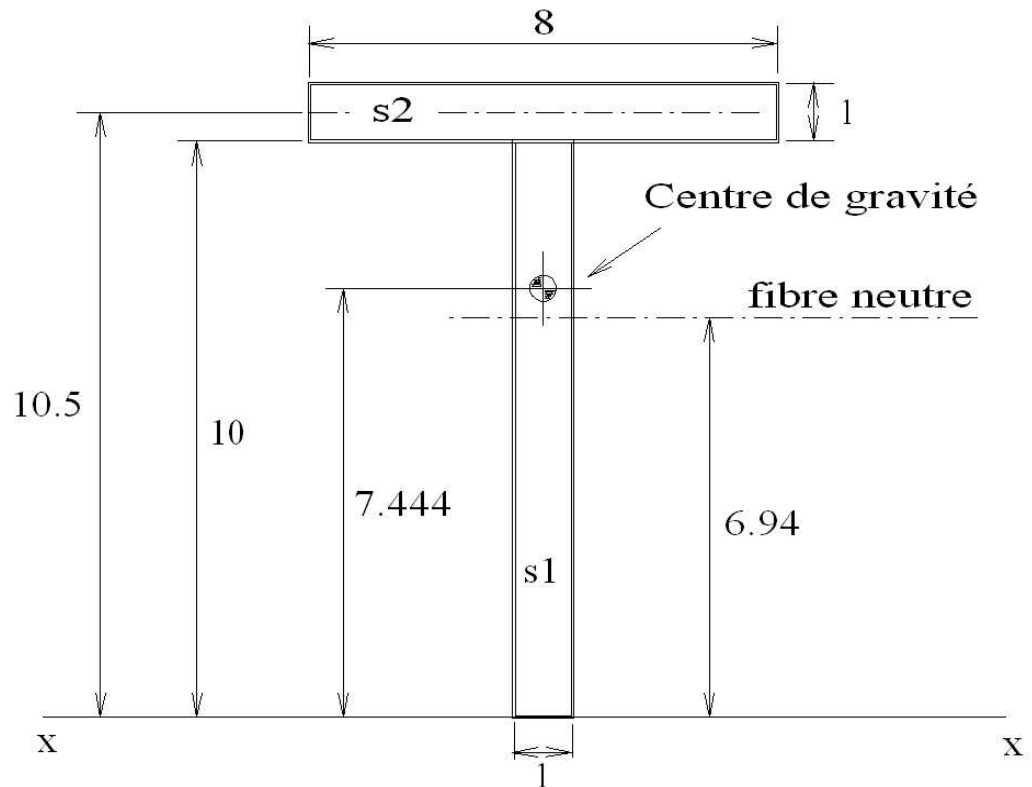
4 ou 5 itérations suffisent à donner la solution exacte en un temps record, pour  $x=0$ .

Avec  $n$  éléments, faire la somme de chaque élément  $i$  :

$$x^2(\sum S_{(i)A} - \sum S_{(i)B}) + 2x(\sum S_{(i)A} a_{(i)} + \sum S_{(i)B} b_{(i)}) + \sum I_{(i)A\text{axe-réf}} - \sum I_{(i)B\text{axe-réf}} = 0$$

En pratique, et traditionnellement, on utilise le centre de gravité des sections même lorsqu'elles sont asymétriques, acceptant, de fait, une certaine imprécision.

Transposons cela dans un exemple chiffré. Prenons une section asymétrique classique telle que celle-ci :



Pour plus de facilité, prenons le centimètre comme unité de mesure.

1 - calcul du centre de gravité de la section.

On prend un axe de référence, par exemple l'axe xx.

$$s1 = 10 \times 1 = 10$$

$$m1 = 10 \times 1 = 10$$

$$s2 = 8 \times 1 = 8$$

$$m2 = 8 \times 10.5 = 84$$

$$\text{Surface totale} = 18 \text{ cm}^2$$

$$\text{Moment total} = 134 \text{ cm}^3$$

$$\text{Centre de gravité (M / S)} = 7.444 \text{ cm par rapport à xx.}$$

Le moment d'inertie de la section par rapport au centre de gravité est le suivant :

a - partie haute :

$$8 \times 1^3 / 12 + 8 \times (10.5 - 7.444)^2 = 75.38 \text{ cm}^4$$

(théorème de STEINER)

$$(10 - 7.444)^3 \times 1 / 3 = 5.57 \text{ cm}^4$$

$$\text{Total de la partie haute} = 80,95 \text{ cm}^4$$

b - partie basse :

$$7,444^3 \times 1 / 3 = 137,5 \text{ cm}^4$$

$$\text{Inertie totale de la section} : 218,45 \text{ cm}^4.$$

Les inerties haute et basse ne sont pas égales comme on s'en doutait. (80,95 et 137,5 cm<sup>4</sup>)

L'application des formules développées plus haut donne la fibre neutre à 6,94 cm de l'axe xx de référence avec une inertie totale de 223 cm<sup>4</sup>.

Voyons quelles incidences ces imprécisions pourraient entraîner.

Supposons que la poutre soit soumise à un moment de flexion de 10.000 daN.cm, et calculons la contrainte maximum dans les deux cas de figure.

a - Calcul à partir du centre de gravité de la section :

$$I = 218,45 \text{ cm}^4 \text{ et } I / v = 218,45 / 7,444 = 29,346 \text{ cm}^3.$$

$$\sigma(v) = M / (I / v) = 340,76 \text{ daN.cm}^2 \text{ ou } 3,407 \text{ daN.mm}^2.$$

b - Calcul à partir de la fibre neutre réelle :

$$I = 223 \text{ cm}^4 \text{ et } I / v = 223 / 6,94 = 32,132 \text{ cm}^3.$$

$$\sigma(v) = M / (I / v) = 311,21 \text{ daN.cm}^2 \text{ ou } 3,112 \text{ daN.mm}^2.$$

La poutre est donc moins sollicitée dans la réalité que ce que donne le calcul à partir du centre de gravité, ce qui peut être considéré comme un coefficient de sécurité supplémentaire.

Toutefois, lorsque les sections sont fortement disymétriques et que le souci principal est d'économiser sur la matière (légèreté), il peut être intéressant d'effectuer cette vérification.

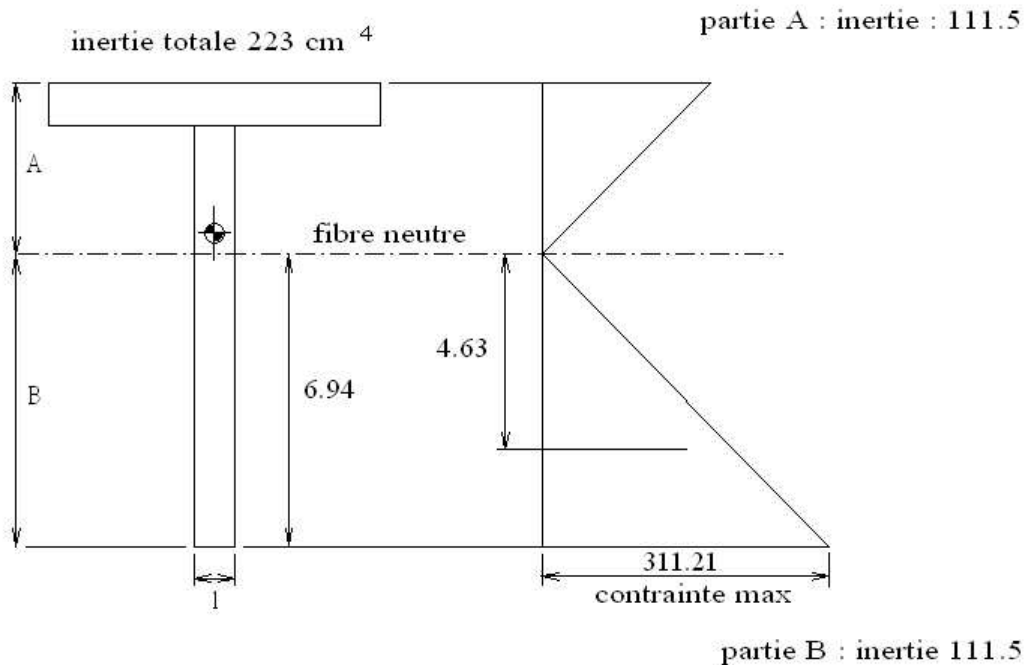
Toutes ces considérations s'appliquent aux matériaux isotropes, on conçoit que lorsque les modules d'élasticité sont différents dans une même poutre, les calculs doivent en tenir compte, et c'est ce que nous abordons maintenant.

## Matériaux non isotrope

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des modules d'élasticité (module de YOUNG) pour la bonne raison que nous avons restreint notre réflexion aux matériaux isotropes, c'est-à-dire avec les modules égaux en traction et en compression .

De ce fait, un allongement de matière dans un sens ou dans l'autre correspondait à une contrainte précise en compression ou en traction. Les "volumes des forces" étaient donc équilibrés de part et d'autre de la fibre neutre.

Reprenons l'exemple chiffré précédent et considérons la partie B.



Nous avons déduit que le moment du "volume en

coin" était égal au moment de flexion pour peu que l'on prenne la dimension (h) égale à la contrainte à cet endroit, comme sur la figure (contrainte max : 311,21 daN.cm<sup>2</sup>).

Vérifions :

1 - Moment de flexion pour la partie B qui nous intéresse soit  $M/2$  donc  $10000/2 = 5000$  daN.cm.

2 - Volume du coin (Base  $\times$  hauteur / 2) :

$$6,94 \times 1 \times 311,21 / 2 = 1079,9 \text{ cm}^3$$

3 - Moment du coin :

$$(6,94 \times 2 / 3) \times 1079,9 = 4996 \text{ soit } 5000 \text{ daN.cm}$$

Le résultat confirme exactement (à l'imprécision des décimales près) ce que nous attendions et le module d'élasticité n'entre pas en compte dans ces calculs. La vérification est forcément exacte car nous avons calculé les 311.21 daN.cm<sup>2</sup> à partir du moment de flexion de 5000 daN.cm.

Il faudra, en revanche, le prendre en compte les modules d'élasticité différents pour déterminer la position de la fibre neutre sachant que dans tous les cas le moment des forces de traction doit être égal au moment des forces de compression à l'intérieur de la poutre.

La loi de HOOKE nous précise que les déformations (les allongements) sont d'autant moins importantes que le matériau est rigide, c'est-à-dire que son module d'élasticité (E) est élevé. Autrement dit, pour une même déformation, la contrainte sera d'autant plus importante que le module d'élasticité est plus élevé, et ceci d'une manière exactement proportionnelle. On

déduit de ces considérations la relation suivante :

$$I_t \cdot E_t = I_c \cdot E_c$$

(t = traction et c = compression).

Ce qui revient à donner un certain "pouvoir" aux inerties en fonction des modules d'élasticité.

Les moments des forces de réaction à l'intérieur de la poutre sont proportionnels aux inerties et aux modules d'élasticité.

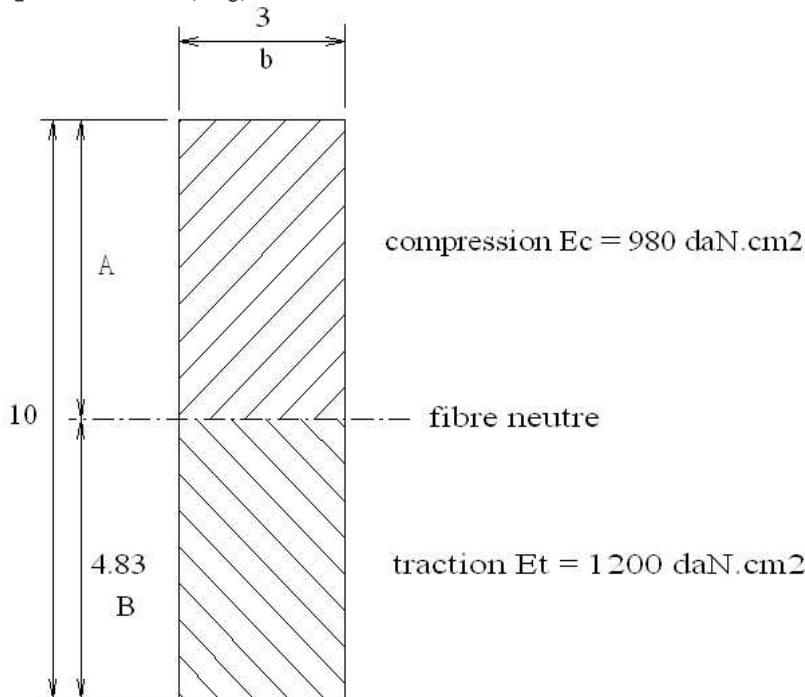
Cette dernière relation va nous permettre de déterminer la position de la fibre neutre.

### Cas d'une poutre rectangulaire

Prenons un matériau comme le bois, par exemple du pin d'Orégon qui a les caractéristiques suivantes :

E traction ( $E_t$ ) = 1200 daN.mm<sup>2</sup>

E compression ( $E_c$ ) = 980 daN.mm<sup>2</sup>.





La partie A est soumise à des contraintes de compression et la partie B à des contraintes de traction. On garde toujours pour acquise l'hypothèse de NAVIER-BERNOUILLI, à savoir que la section reste plane après déformation. Mais une même déformation est produite par une plus grande contrainte en traction qu'en compression dans le matériau qui nous occupe, soit :

$$I_A \cdot E_c = I_B \cdot E_t \quad \text{d'où}$$

$$I_A / I_B = E_t / E_c$$

Puisque la largeur (b) est constante dans cette section, le rapport

$$I_A / I_B \text{ est égal à } A^3 / B^3 \text{ d'où}$$

$$E_t / E_c = A^3 / B^3 \text{ ou}$$

$$\left( \frac{E_t}{E_c} \right)^{1/3} = \frac{A}{B}$$

Comme  $A = H - B$  ;

$$\frac{A}{B} = \frac{H - B}{B} = \frac{H}{B} - \frac{B}{B} = \frac{H}{B} - 1$$

$$\left( \frac{E_t}{E_c} \right)^{1/3} = \frac{H}{B} - 1 \text{ donc } \left( \frac{E_t}{E_c} \right)^{1/3} + 1 = \frac{H}{B}$$

$$\text{et finalement : } B = \frac{H}{\left( \frac{E_t}{E_c} \right)^{1/3} + 1}$$

Dans l'exemple que nous avons choisi cela donne :

$$E_t / E_c = 1200 / 980 = 1,2245$$

$$B = 10 / (1,2245^{1/3} + 1) = 4,8313 \text{ cm (fibre neutre)}.$$

Effectuons la vérification :

$$I_A = (10 - 4,8313)^3 \cdot b / 3 = 138,084 \text{ cm}^4$$

$$I_B = 4,8313^3 \cdot b / 3 = 112,77 \text{ cm}^4$$

Inertie totale par rapport à la fibre neutre : 250,854 cm<sup>4</sup>

$$I_A \cdot E_c = 135322$$

$$I_B \cdot E_t = 135324$$

L'égalité recherchée est respectée.

Avec ce résultat, voyons comment calculer les contraintes à l'intérieur de la poutre.

Supposons un moment de flexion de 10000 daN.cm et prenons la moitié (une moitié en traction, une moitié en compression) soit 5000 daN.cm.

Pour que  $I_A$  soit égal = 5000, il faut que la contrainte «  $\sigma$  » maximum à la distance  $v$  ait une valeur bien précise et nous connaissons la formule :

$$\sigma = \frac{M}{(I/v)} \text{ ou } \sigma = \frac{Mv}{I} \text{ donc :}$$

a - Contrainte de compression :

$$v = 10 - 4,8313 = 5.17 \text{ cm; } I_c = 138,084 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_c = 5000 \times 5,17 / 138,084 = 187,2 \text{ daN.cm}^2$$

b - Contrainte de traction :

$$v = 4,8313 ; I_t = 112,77 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_t = 5000 \times 4,8313 / 112,77 = 214,2 \text{ daN.cm}^2$$

Nous pouvons aussi procéder autrement en tenant compte des inerties des sections avec leur module d'élasticité.

La somme des  $E_n \cdot I_n$  qui compose chaque partie du matériau sera le EI total de la section et représente pleinement la "rigidité" de celle-ci.

Pour avoir le EI total de la section dans notre exemple, ajoutons les EI des deux parties A et B :

$$EI_{\text{total}} = EI_A + EI_B$$

$$EI_{\text{total}} = 135323 \times 2 = 270646$$

$$EI_{\text{total}} = EI \text{ dorénavant, par convention.}$$

a - Calcul de la contrainte de compression :

$$v = 10 - 4,8313 = 5,17 \text{ cm}$$

$$\sigma_c = M \cdot E_c \cdot v / EI = 187,2 \text{ daN.cm}^2$$

b - Calcul de la contrainte de traction :

$$v = 4,8313 \text{ cm}$$

$$\sigma_t = M \cdot E_t \cdot v / EI = 214,2 \text{ daN.cm}^2.$$

On peut évidemment calculer directement la valeur de  $M / EI$ , valeur que l'on multiplie à chaque fois par les  $E_n.v$  pour chaque matériaux considéré.

Par exemple si  $M / EI = k$ , alors  $\sigma = k.E_t.v$

Les résultats sont évidemment les mêmes que la méthode précédente mais cette méthode est mieux adaptée pour les calculs sur les matériaux composites qui se composent de  $n$  matériaux différents.

Connaissant le moment d'inertie total de la section, nous pouvons connaître le module total qui va correspondre au module d'élasticité en flexion :  $E_f$

$E_f = EI / I_{\text{total}} = 1079$  dans notre exemple.

Note : Nous ne nous sommes pas préoccupés des unités de mesure dans les modules d'élasticité, ici en  $\text{daN.mm}^2$ , alors que nos calculs utilisent le  $\text{cm}$ . Ceci n'a pas d'importance car seul le rapport des modules nous intéresse.

$E_f = 1079 \text{ daN.mm}^2$  pour ce matériau. Ce module d'élasticité en flexion s'applique à une section dont on connaît l'emplacement de la fibre neutre. Cet emplacement ne peut être connu qu'avec  $E_c$  et  $E_t...$

Pour une section rectangulaire, en résumé :

1 - Calcul de la position de la fibre neutre :

$$B = H / ((E_t / E_c)^{1/3} + 1)$$

2 - calcul des inerties par rapport à la fibre neutre.

3 - Calcul de  $EI = E_t + E_c$

4 - Calcul de  $M/EI$

5 - Calcul des contraintes

$$\sigma_t = \frac{E_t \cdot v_t \cdot M}{EI} \text{ et } \sigma_c = \frac{E_c \cdot v_c \cdot M}{EI}$$

La démarche est assez fastidieuse pour obtenir la valeur des contraintes maximum qui de toute façon seront l'objet d'un coefficient de sécurité. Dans la pratique, on s'en tient au calcul classique des matériaux isotropes et on ignore les modules d'élasticité en traction et en compression. Lorsque ceux-ci sont assez peu différents, comme pour le pin d'Orégon de notre exemple, l'erreur est assez minime :

$$I = 10^3 \cdot 3 / 12 = 250 \text{ cm}^4 \text{ (au lieu de } 250.82 \text{ cm}^4\text{)}$$

Les contraintes maximum en traction ou en compression deviennent :

$$\sigma = 10000 \times 5 / 250 = 200 \text{ daN.cm}^2$$

(au lieu de 187 et 214, soit 6,5% et 7% d'erreur).

L'approximation est donc acceptable, mais il fallait savoir quelle marge d'erreur implique la méthode.

Certain matériaux composites (fibres exotiques) pré-

sentent une très grande différence entre leurs modules et une approche empirique est tout à fait à proscrire.

Également lorsque le matériau n'est pas isotrope et que la section n'est pas symétrique, à mon avis, il vaut mieux calculer les contraintes avec précision sous peine d'erreurs trop importantes.

Le calcul de la position de la fibre neutre est plus complexe qu'avec une poutre rectangulaire. Nous pouvons reprendre les formules que nous avons élaborées pour les sections asymétriques isotropes, mais cette fois-ci en appliquant à chaque élément les modules d'élasticité correspondants.

Nous avons une équation du second degré

$ax^2 + bx + c = 0$  avec A = compression, B = traction et  $d_{(i)}$  = distance du  $CG_{(i)}$  à l'axe de référence

$$a = \sum S_{(i)A} - \sum S_{(i)B}$$

$$b = 2 \times \left( \sum S_{(i)A} d_{(i)} + \sum S_{(i)B} d_{(i)} \right)$$

$$c = \sum I_{(i)A \text{ axeréf}} - \sum I_{(i)B \text{ axeréf}}$$

qui nous permettrait de trouver le décalage (x) de la fibre neutre par rapport au centre de gravité de la section. Nous allons appliquer les mêmes formules de la façon suivante :

$$a = \sum S_{(i)A} E_{(i)c} - \sum S_{(i)B} E_{(i)t}$$

$$b = 2 \times \left( \sum S_{(i)A} E_{(i)c} d_{(i)} + \sum S_{(i)B} E_{(i)t} d_{(i)} \right)$$

$$c = \sum I_{(i)A} E_{(i)c} - \sum I_{(i)B} E_{(i)t}$$

Lorsque les matériaux sont nombreux comme dans les matériaux composites, il suffit de faire la somme des éléments soumis à la compression multipliés par leurs modules d'élasticité et la somme des éléments soumis à la traction multipliés par leurs modules d'élasticité.

Résumé :

1 - Chercher le centre de gravité géométrique de la section.

2 - Appliquer la formule permettant de trouver la position de la fibre neutre et recommencer avec le décalage obtenu tant que la différence

$$\sum I_{A(i)} \cdot E_{(i)c} - I_{B(i)} \cdot E_{(i)t}$$

n'est pas égale à zéro.

3 - Calculer le EI de la section, soit la somme de tous les  $I_c \cdot E_c$  et tous les  $I_t \cdot E_t$ .

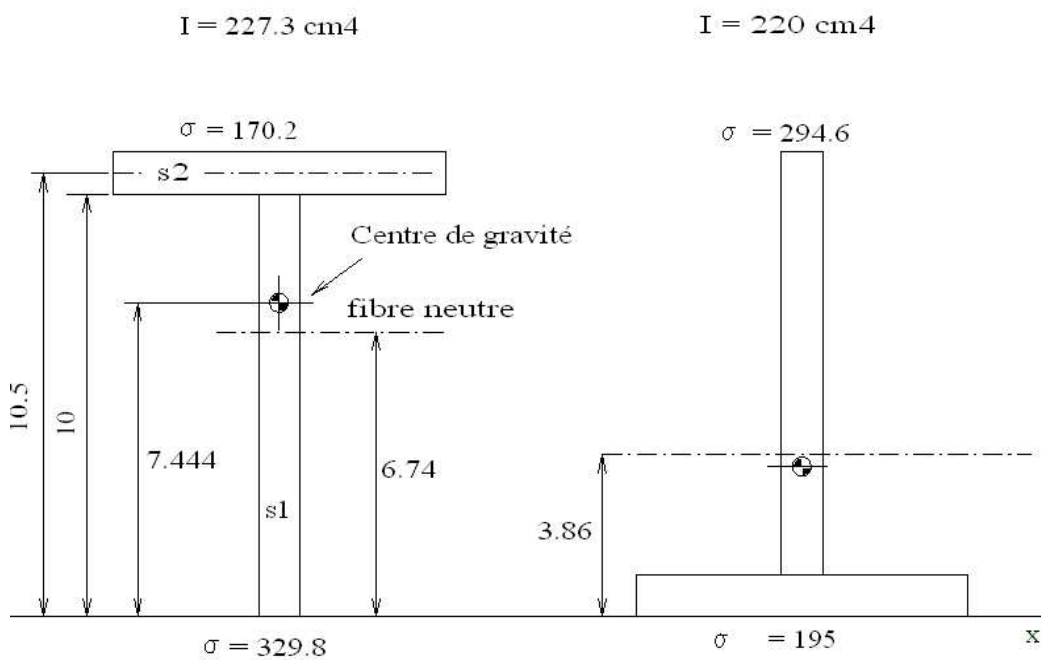
4 - calculer le  $M / EI$ .

5 - Maintenant, pour obtenir la contrainte à une certaine distance  $d$  de la fibre neutre :

$$\sigma_d = \frac{M}{EI_{total}} \times d \cdot E_m$$

$E_m$  = le module d'élasticité du matériau considéré à la distance  $d$  de la fibre neutre et en traction ou en compression.

Reprenons notre exemple de la poutre en T en pin d'Orégon.



Si on ne tient pas compte des différents modules dans cet exemple et avec un moment de flexion de 10000 daN.cm, on obtient :

$$I = 218,45 \text{ cm}^4$$

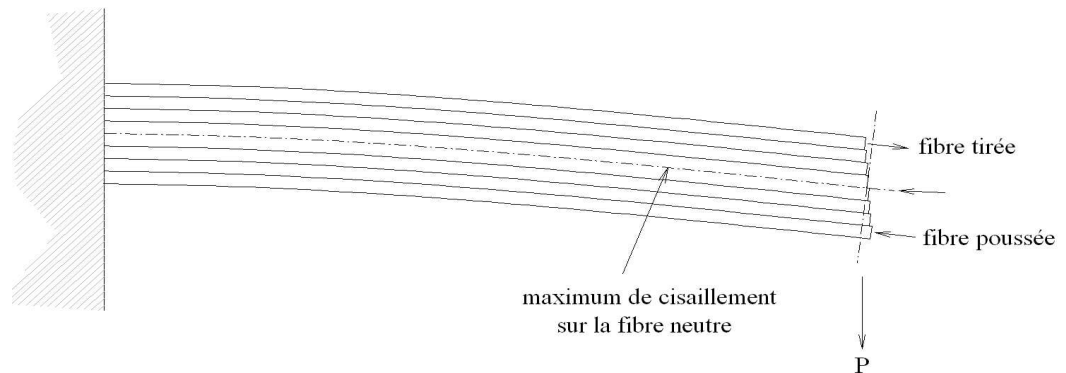
$$\sigma(c) = 162,8 \text{ daN.cm}^2$$

$$\sigma(t) = 340,8 \text{ daN.cm}^2$$

différents des chiffres indiqués sur la figure.



## Les forces de cisaillement

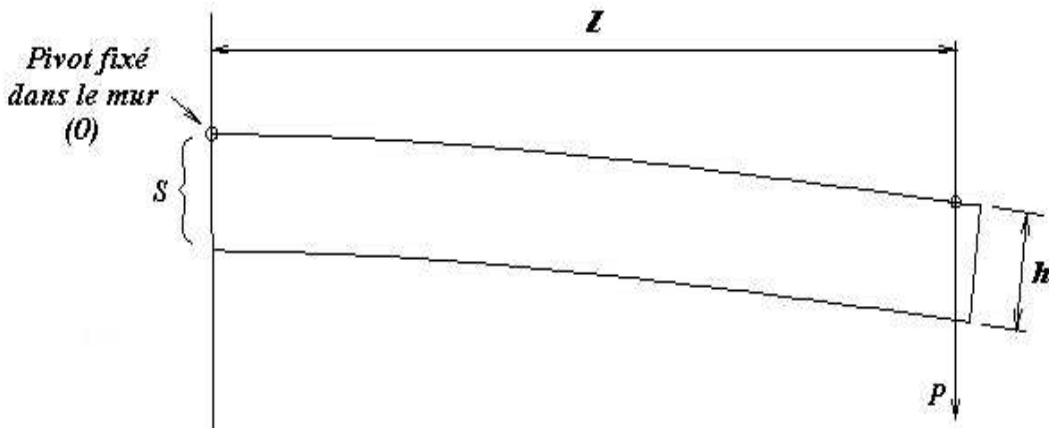


Imaginons que la poutre soit constituée d'une infinité de plis empilés les uns sur les autres. Si ces plis ne sont pas collés, ils glissent les uns contre les autres afin de préserver leur longueur lorsque la poutre fléchit.

Maintenant collons tous ces plis ensemble. Lorsque que la poutre adopte une certaine courbure sous les efforts du moment de flexion, on constate que chaque pli devra s'allonger ou se raccourcir, d'autant plus qu'il sera situé loin de la fibre neutre qui, elle, garde sa longueur d'origine.

En partant du pli le plus éloigné de la fibre neutre et en s'approchant de-celle-ci, chaque pli infiniment mince sera sollicité individuellement et devra assumer les forces appliquées sur le pli directement au-dessus de lui et ainsi de suite de proche en proche de sorte que la fibre neutre sera la fibre la plus contrainte. Cette contrainte définira la résistance critique de la poutre entière, le cas échéant.

Imaginons maintenant la poutre rectangulaire de section  $h \times b$ , de longueur  $l$  fixée dans le mur par un pivot  $O$  comme dessiné :



Le pivot serait solidaire d'une fibre « haut module « infiniment rigide » » collée sur toute la longueur et sur toute la largeur de la poutre.

Lorsque la poutre est soumise à un moment de flexion  $Pl$ , une réaction se produit automatiquement telle que  $Pl = Ra = M$ . Exactement comme nous l'avons vu dans le chapitre « contraintes », s'agissant de la flexion pure.

La situation est la même que celle qui consisterait à arracher un clou du mur, le pivot  $O$  étant le clou et le point d'appui de ce levier se trouve à une distance  $a$ , située quelque part sur la section de surface appuyée sur le mur.

- $R$  : force de réaction
- $a$  : levier de  $O$  au barycentre des forces d'appui réparties triangulairement sur le mur.

La force de réaction  $R$  s'écrira  $R = \frac{Pl}{a}$  comme nous

l'avons vu dans les chapitres précédents concernant les contraintes de flexion.

«  $a$  » est le bras de levier entre  $O$  et le barycentre des forces appliquées sur la section  $S$  et dépend donc de la géométrie de la section.

Si la section est rectangulaire alors  $a = \frac{2h}{3}$ , sinon

$a = \frac{I}{m}$ ,  $m$  étant le moment de la surface  $S$  par rapport à  $O$ .

[Développement de  $a = \frac{I}{m}$  pour une section rectangulaire :

$$m = \frac{Sh}{2} = \frac{hbh}{2} = \frac{h^2b}{2}$$

$$I = \frac{h^3b}{3} ; a = \frac{I}{m} ; a = \frac{h^3b}{3} \times \frac{2}{h^2b} = \frac{2h}{3},$$

c'est en effet exact, le CG d'un triangle (des forces) se situe à la hauteur  $\frac{2h}{3}$  de son sommet comme on s'y attendait.]

La formule générale  $a = \frac{I}{m}$  permet de trouver la valeur de  $a$  quelle que soit la géométrie de la section et résoudre l'équation  $R = \frac{Pl}{a}$  comme nous l'avons vu déjà,

d'où  $R = \frac{Pl}{\frac{I}{m}}$  ou  $R = Pl \times \frac{m}{I}$  .....  $R = \frac{Plm}{I}$  dans le

cas de la console. La force  $R$  est reprise par la fibre de haut module et répartie sur toute la surface  $lb$  c'est-à-dire sur toute la longueur et sur toute la largeur de la poutre. La contrainte par unité de surface sera donc :

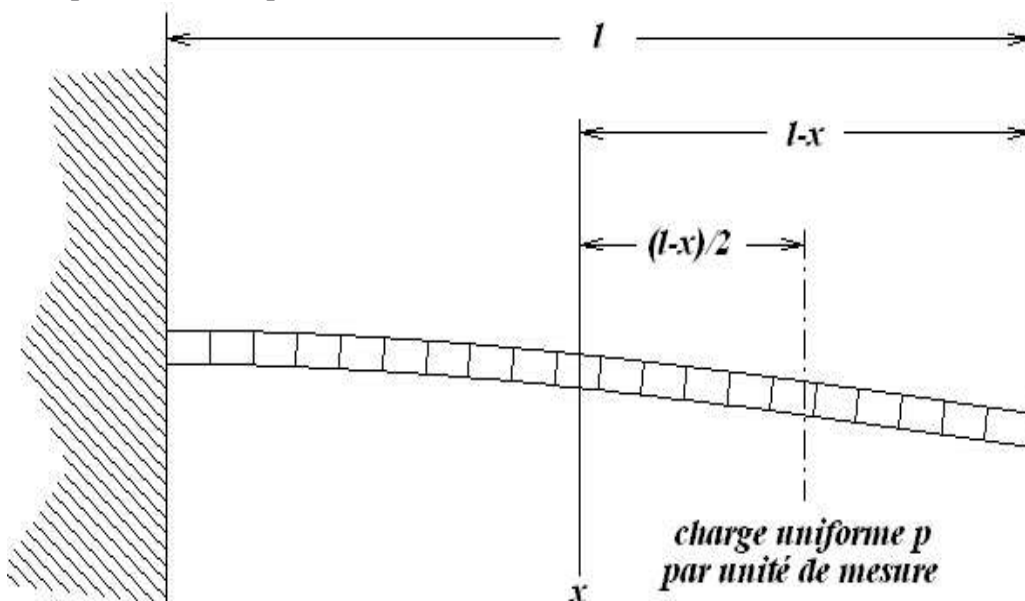
$$\sigma_c = \frac{R}{lb}$$

Finalement  $\sigma_c = \frac{Plm}{Ilb}$  et en éliminant  $l$  :

$$\sigma_c = \frac{Pm}{Ib}$$

( $b$  = largeur de la section à l'endroit de la fibre neutre.)  
 Dans le cas présent, la poutre est contrainte en porte-à-faux, la valeur de  $P$  est égale à la force appliquée localement au bout de  $l$ . On constate que pour ce cas de figure, la valeur de  $\sigma_c$  restera la même tout le long de la poutre.

Si la charge est répartie uniformément sur la poutre et non plus localement, toujours dans le cas de la console ou poutre en porte-à-faux :



Le moment de flexion variera en fonction de la charge appliquée par unité de longueur et la contrainte de cisaillement  $T$  ne sera plus constante :

Charge par unité de longueur :  $p$  et  $P = p(l-x)$

$$\text{En } x : M = \frac{p(l-x)(l-x)}{2} = \frac{p(l-x)^2}{2}$$

Principe de calcul de contrainte de cisaillement :

$$R = \frac{M}{a} \Rightarrow R = \frac{p(l-x)^2}{2a} \text{ et } a = \frac{I}{m} \text{ d'où } R = \frac{p(l-x)^2 m}{2I}$$

$R$  se répartira sur la surface  $\frac{(l-x)b}{2}$ , donc sur la largeur et sur la longueur de la poutre entre  $x$  et le CG de la charge, soit  $l/2$ .

Pour obtenir la contrainte de cisaillement par unité de surface, nous devons diviser  $R$  par  $\frac{(l-x)b}{2}$  ou le multiplier

par son inverse :  $\frac{2}{(l-x)b}$

$$\sigma_c = \frac{p(l-x)^2 m}{2I} \times \frac{2}{(l-x)b} = \frac{p(l-x)m}{Ib}$$

On déduit la force de cisaillement  $T = p(l-x)$

On remarque que la dérivée du moment de flexion

$$\frac{dM(x)}{dx} = \text{dérivée de } \frac{p(l-x)^2}{2} = p(l-x)$$

Et finalement  $\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$

En résumé pour notre console uniformément chargée :

$$M = \frac{p(l-x)^2}{2} \Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = -p(l-x)$$

$$T = p(l-x) \Rightarrow \sigma_c = \frac{p(l-x)m}{Ib} \text{ ou } \frac{Tm}{Ib}$$

Moment maxi à l'encastrement :  $M = \frac{Pl}{2}$

Cisaillement Maxi à l'encastrement :  $T = pl = P$

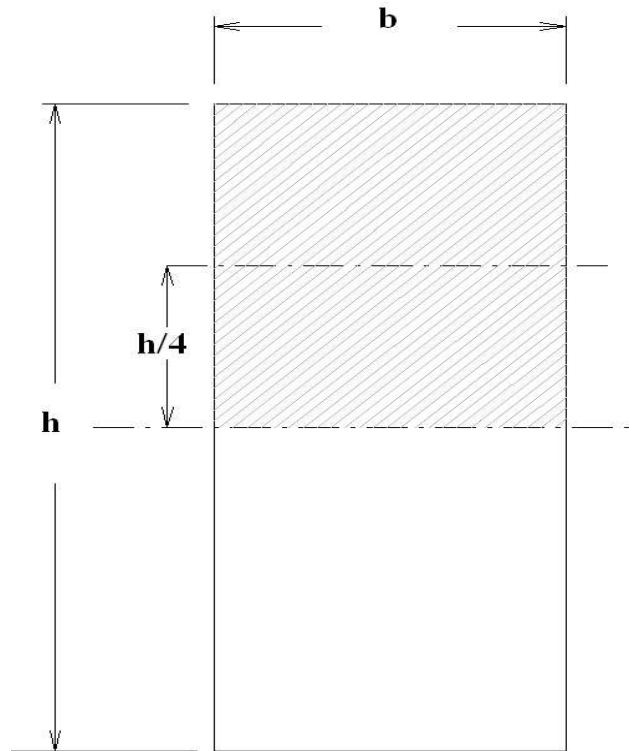
La formule  $\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$  donne la valeur de la contrainte par unité de mesure au cœur de la section, c'est-à-dire au centre de gravité général.

Note :

L'exemple explicatif simplifié ci-dessus avec un pivot fiché dans le mur correspond en réalité à une demi-section. Le point O était situé à l'endroit du centre de gravité de la section totale. En principe les moments des surfaces de section calculés au-dessus ou au-dessous du CG sont égaux, ce fait détermine la position du CG.

Par demi-section, les forces de cisaillement sont à prendre également par moitié, soit égales à  $T/2$  dans notre démonstration. Mais en prenant l'Inertie de la section entière, c'est-à-dire deux fois plus que dans nos calculs, et une charge  $P$  entière, soit également deux fois plus que dans nos calculs, on se retrouve avec les mêmes résultats.

$\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$  avec  $Ib$  de la section entière.



Lorsque la section est composée d'un seul matériau isotrope :

$\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$  peut s'écrire d'une autre manière décomposée ici pour une section rectangulaire :

$$m = \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

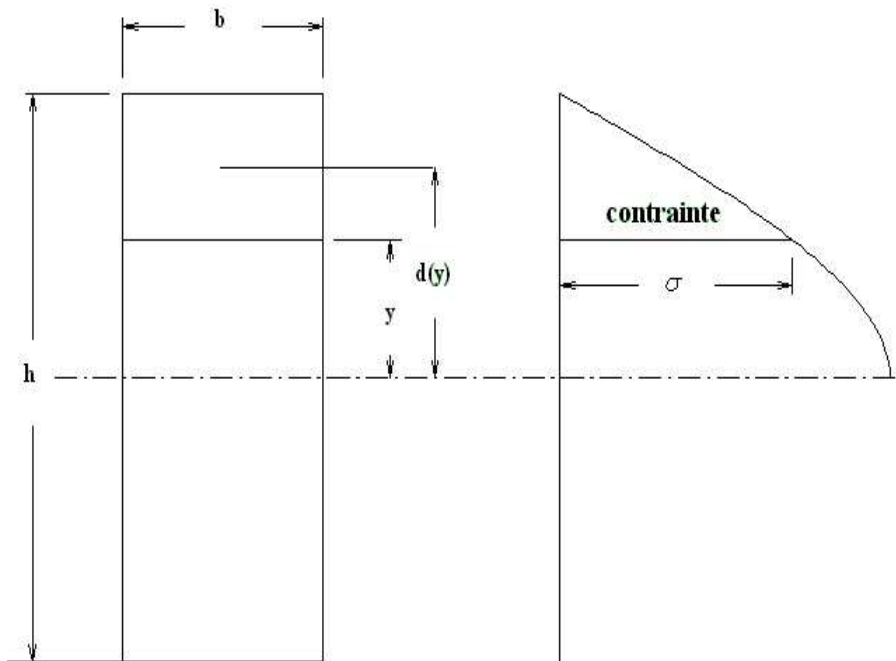
$$Ib = \frac{h^3b}{12} b = \frac{h^3b^2}{12}$$

$$\sigma_c = \frac{Tm}{Ib} = T \frac{bh^2}{8} \times \frac{12}{h^3b^2} = T \frac{3}{2bh} = T \frac{3}{2S}$$

avec  $S$  : Surface totale de la section.

**Discussion** au sujet des contraintes de cisaillement...

L'approche n'est pas aussi évidente pour l'entendement qu'elle pouvait l'être pour les contraintes de flexion pure. On remarque que la section étudiée ne reste pas exactement « plane » si l'on s'en tient strictement à la formulation  $\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$ .



Voyons comment se répartissent les contraintes à différentes hauteurs de la section considérée dans une section rectangulaire avec  $b$  constant :

- «  $d$  » du CG de la surface / fibre neutre =  $y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}$

- surface  $s = b \left( \frac{h}{2} - y \right)$

A la hauteur «  $y$  », le moment de la surface directement au-dessus de  $y$  sera donc ;



$$b\left(\frac{h}{2} - y\right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right)$$

et la contrainte à la hauteur  $y$  ;

$$\sigma = \frac{b\left(\frac{h}{2} - y\right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right)}{Ib} = \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right)}{I}$$

Réduisons...

$$\left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) = y + 0,5 \left( \frac{h}{2} - y \right) = y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} = \frac{h}{4} + \frac{y}{2}$$

$$\sigma = \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right)}{I}$$

$$\sigma = \frac{\frac{h^2}{8} + \frac{hy}{4} - \frac{hy}{4} - \frac{y^2}{2}}{I} = \frac{\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{\frac{bh^3}{6}}$$

$$\sigma = \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{6}{bh^3}$$

avec  $k_1 = \frac{h^2}{4}$  et  $k_2 = \frac{6}{bh^3}$  (constantes)

$\sigma = k_1 k_2 - k_2 y^2$  : équation d'une parabole qui montre

que la répartition des contraintes de cisaillement n'est pas linéaire sur la hauteur de la section et par conséquent la section sollicitée ne reste pas plane comme avec les contraintes de flexion. Les déformations dues aux effets du cisaillement influent sur la flèche en fonction d'un module « G » de cisaillement propre à chaque matériau.

Où se situera la « fibre neutre » qui équilibre les contraintes de cisaillement ? La théorie laisse entendre qu'elle se trouve au « centre de gravité géométrique » de la section, ce qui n'est pas le cas pour les contraintes de flexion pure comme nous l'avons vu si la section n'est pas symétrique. C'est le cas général pour le calcul d'une plaque avec son raidisseur associé qui se trouve toujours situé sur une seule face de la plaque, à l'intérieur du navire.

Il faudrait tenir compte des efforts combinés de flexion et de cisaillement pour déterminer une base de calcul correcte. Mais avec les matériaux qui nous occupent, cela s'avère quasiment impossible à cause de l'ignorance des valeurs réelles des modules d'élasticité en traction et en compression et en cisaillement !

La contribution à la flèche pour les contraintes de cisaillement reste cependant assez faible, suffisamment pour être ignorée dans la plupart des cas qui nous occupent quand il s'agit de construction en bois. Il faut dire également que la valeur exacte de la flèche issue des glissements de cisaillement à l'intérieur d'un matériau composite est d'un abord extrêmement complexe qui dépasse largement le cadre de cet ouvrage.

Il est donc nécessaire de faire jouer l'expérience pour

« apprécier » les caractéristiques des bois, même après avoir effectué des tests sur échantillon. C'est ici que le coefficient de sécurité entre en lice...

Mais nous pouvons tenter une approche en calculant la relation entre les contraintes de flexion et les contraintes de cisaillement pour se faire une idée.

Ce qui ouvre le chapitre suivant...

\*

### **RELATION ENTRE LES CONTRAINTES DE FLEXION ET LES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT**

Contrainte de flexion :  $\sigma_f = \frac{Mv}{I}$

Contrainte de cisaillement :  $\sigma_c = \frac{Tm}{Ib}$

1 - Dans le cas de la poutre rectangulaire en porte-à-faux :

$$T = P$$

$$M = Pl$$

$$v = h/2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow Ib = \frac{b^2h^3}{12}$$

$$m = \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$\sigma_f = \frac{Mv}{I} = \frac{Plh}{2} \times \frac{12}{bh^3} = \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{6Pl}{Sh} \text{ puisque } S = bh$$

$$\sigma_c = \frac{Tm}{Ib} = \frac{3P}{2bh} \Rightarrow \left[ \frac{3T}{2S} \text{ dans le cas général lors-} \right.$$

que T représente la contrainte totale de cisaillement.]

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{6Pl}{bh^2} \times \frac{2bh}{3P} = \frac{12Plbh}{3Pbh^2} = \frac{4l}{h}$$

Exemple d'une poutre en porte-à-faux d'une hauteur  $h$  20 mm, de largeur  $b$  40 mm, de longueur  $l$  1000 mm et chargée avec 10 N au bout de  $l$  :

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{3,75}{0,01875} = 200 \dots \dots \dots \frac{4l}{h} = \frac{4000}{20} = 200$$

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement est 200 fois inférieure à la contrainte de flexion.

Si l'exigence impérative est l'économie des matériaux ou bien la réduction de poids, voyons ce que donnent différentes géométries d'une poutre rectangulaire de poids égal, c'est-à-dire de même surface de section...

Puisque  $\sigma_c = \frac{3T}{2S}$  dans le cas d'une poutre rectangu-

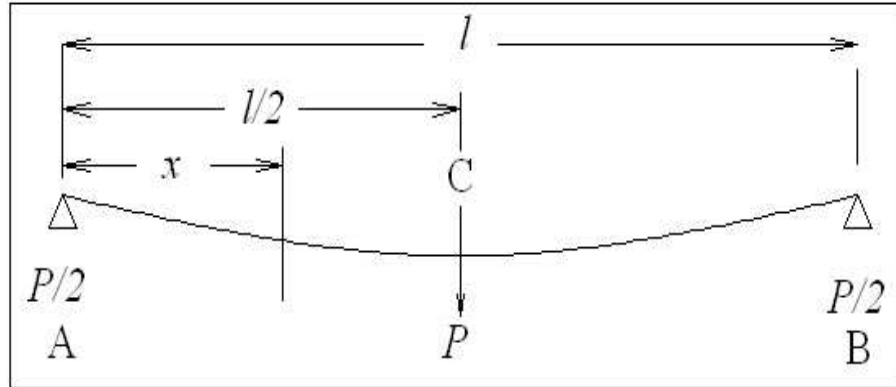
laire, on déduit que la contrainte de cisaillement à l'intérieur de la poutre sera toujours la même quelles que soient les dimensions hauteur x largeur ( $h \times b$ ), lesquelles donneront toujours la même surface  $S$ .

En revanche comme  $\sigma_f = \frac{6Pl}{Sh}$  montre que la con-

trainte de flexion sera inversement proportionnelle à la hauteur  $h$ .

Néanmoins, une poutre trop haute par rapport à sa largeur  $b$  risque de « déverser » sauf si elle est maintenue latéralement comme c'est le cas avec des poutres en T, en U ou en I...

## Moments de flexion et cisaillement Exemples



Sur deux appuis, charge ponctuelle au milieu de  $l$  en C  
On considère les forces de réaction aux appuis pour le calcul des moments. En A, force =  $P/2$

Moment maxi en C :  $M = \frac{P}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$

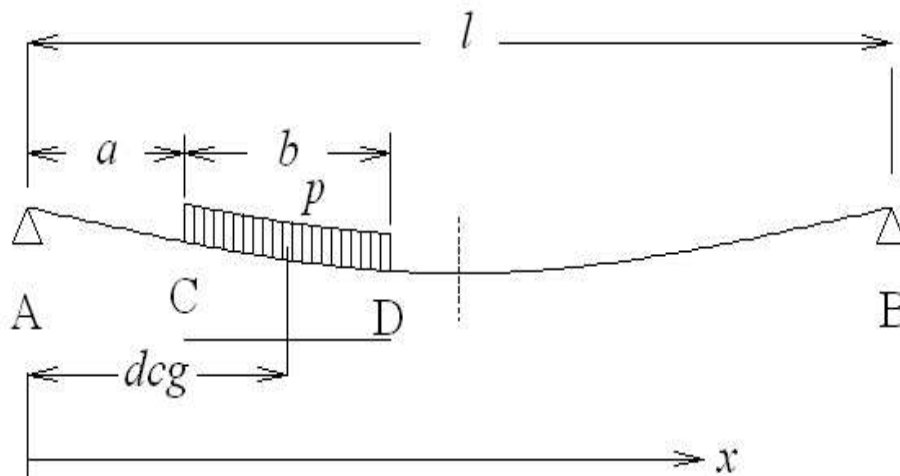
En  $x$  :

**de A à C :**  $M = \frac{Px}{2}$  ;  $T = P/2$

**de C à B :**  $M = \frac{P(l-x)}{2}$  ;  $T = -P/2$

\*

Charge uniforme partielle...



On commence par calculer la réaction  $RA$  sur le support en A :

La charge totale  $P = p \times b$  avec le  $Cg$  situé à  $a + \frac{b}{2}$  de

A soit à  $d_{cg}$  et à  $l - d_{cg}$  de B

$$RA = P \frac{l - d_{cg}}{l} \quad (RB = P \frac{d_{cg}}{l})$$

Calcul des moments de flexion  $M$

Le raisonnement est le suivant :

On considère le couple  $+RAx$  à la distance  $x$  de A, puis on soustrait le couple défini suivant la charge si elle existe par rapport à  $x$ .

**- de A à C :**

$$M = RAx$$

$$T = RA$$

**- de C à D :**

$$M = RAx - p(x - a) \frac{(x - a)}{2} = RAx - p \frac{(x - a)^2}{2}$$

$$T = RA - p(x - a)$$

**- de D à B :**

$$M = RAx - P(x - d_{cg})$$

$$T = RA - P$$

**- Pour  $x = l$  :**

$$M = RA l - P(l - d_{cg})$$

Puisque  $RA = P \frac{l - dcg}{l} \Rightarrow RAl = P(l - dcg)$

Donc logiquement :

$$M = P(l - dcg) - P(l - dcg) = 0$$

### **Contraintes de cisaillement**

dans un matériau composite

Avant d'effectuer ces calculs, on doit connaître la position du centre de gravité de la section par exemple au-dessus de la base de la section.

$$CG = \frac{\sum m_i E_i}{\sum S_i E_i}$$

Ce qui revient à donner un « pouvoir » à chaque surface (*i*) proportionnellement à son module  $E(i)$  en flexion.

Pour le calcul des contraintes de cisaillement, le raisonnement consiste à additionner les moments de chaque pli « directement au dessus » de matériau différent en tenant compte de sa géométrie et de son module d'élasticité.

#### Exemple :

Soit une section constituée d'une mousse de

$h 30 \times b 40$  mm,

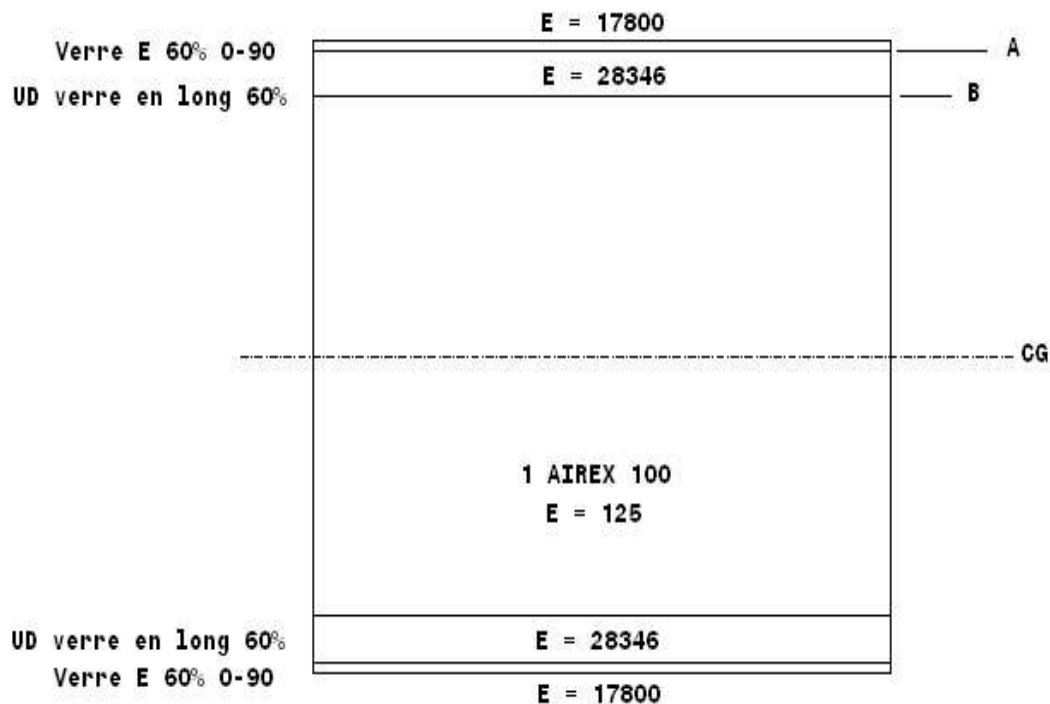
+ un pli par face avec un UD

+ un pli par face avec un sergé.

Charge de 180 N centrée au milieu d'une portée de

1000 mm

La contrainte de cisaillement T totale est de 90 N



ELEMENT	S(1)	CG(2)	M(3)	E(4)	ME(5)	$\sigma$
Verre E 60% 0-90	23.68	18.018	426.666	17800	7594655.868	3,521
UD verre E 60%	108.88	16.361	1781.386	28346	50495167.556	26.934
Airex 100	600	7.5	4500	125	562500	27.196

$$\sigma_i = \frac{T \times m_i E_i}{b \sum E_i I_i}$$

$$b \sum E_i I_i = 1\,941\,069\,558$$

$$D = \frac{T}{b \sum E_i I_i} = \frac{90}{1941069558} = 4,636619 \cdot 10^{-8}$$



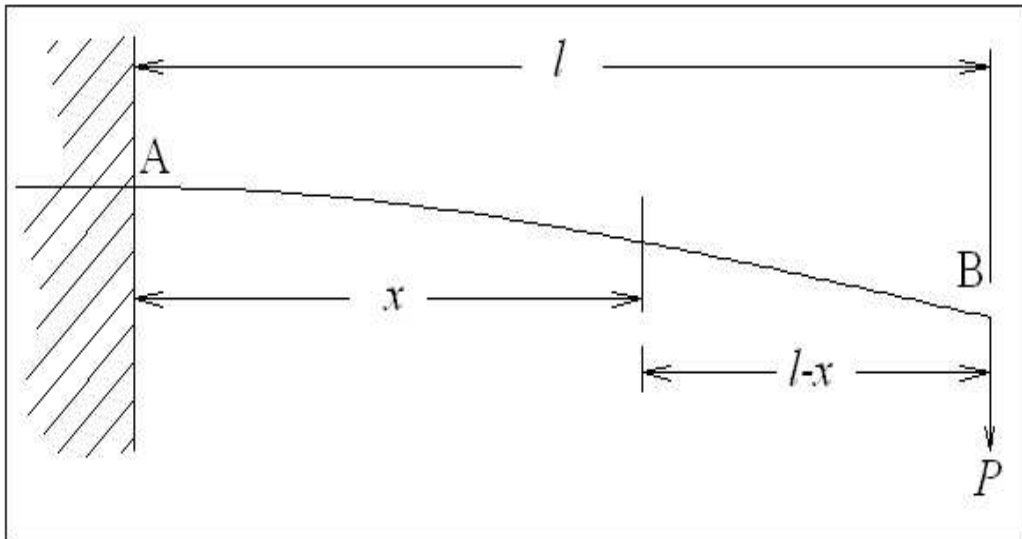
- 1 – surface  $h \times b$  de l'élément
- 2 – hauteur du cg de cette surface / fibre neutre
- 3 – moment  $S \times cg = m$
- 4 – E (module d'élasticité en flexion)
- 5 –  $m \times E$
- 6 – contrainte aux points A, B et CG :
  - sous le pli n°1 (A) :
  - $\sigma_c = 7594655.868 \times D = \mathbf{0,3521 \text{ N/mm}^2}$
  - 
  - sous le pli n° 2 (B) :
  - Cumul de  $m_1 E_1 + m_2 E_2 = 58089823.424$
  - 
  - $\sigma_c = 58089823.424 \times D = \mathbf{2,6934 \text{ N/mm}^2}$
  - 
  - à la fibre neutre (CG) :
  - Cumul de  $m_1 E_1 + m_2 E_2 + m_3 E_3 = 58652323.424$
  - 
  - $\sigma_c = 58652323.424 \times D = \mathbf{2,7196 \text{ N/mm}^2}$

La contrainte maximum sera toujours assumée par la fibre neutre. C'est un endroit critique à voir d'emblée lors dans la conception d'un matériau composite constitué d'une âme légère pour gagner du poids.

## Les déformations

Une poutre supporte une charge en se déformant suivant une ligne élastique bien définie telle que  $y = f(x)$  a priori inconnue. On sait seulement pour le moment que la flèche  $y$  est nulle au niveau des appuis. Soit dans le cas de la figure ci-dessous, en A, pour  $x=0 \Rightarrow y = 0$  et donc  $f(0)=0$ .

On sait par ailleurs que le moment de flexion varie le long de la poutre en fonction de  $x$  :  $M = P(l-x)$  ici.

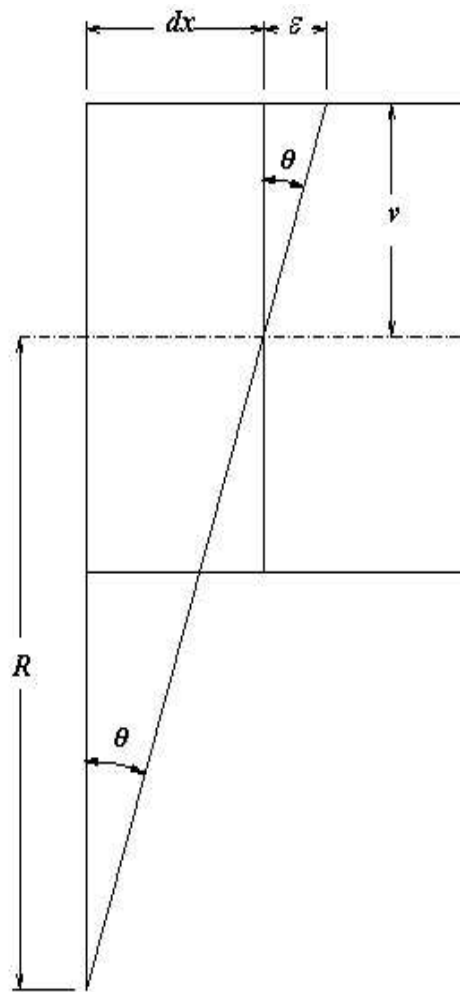


À la position  $x$  de la poutre, on peut calculer le rayon de courbure local  $R$ .... Comment ?

Le résultat à trouver est :  $R = \frac{EI}{M}$ , ou  $C = \frac{M}{EI}$

$C$  étant la courbure, l'inverse du rayon de courbure...

Considérons une section à l'endroit  $x$  de notre poutre soumise à un moment de flexion  $M(x)$ .



Sous la contrainte la fibre la plus sollicitée s'allonge d'une dimension  $\varepsilon$ .

L'allongement  $i$  sera donc :  $i = \frac{\varepsilon}{dx}$  comme nous

l'avons vu au chapitre « loi de Hooke »...

Selon cette loi :

$i = \frac{\sigma}{E}$  avec  $E$  : module d'élasticité et  $\sigma$  : contrainte à cet endroit.

donc  $\frac{\varepsilon}{dx} = \frac{\sigma}{E}$  d'où  $\varepsilon = \frac{\sigma dx}{E}$

par ailleurs  $\sigma = \frac{Mv}{I}$  comme nous l'avons vu.

En remplaçant  $\sigma$  par  $\frac{Mv}{I}$  dans  $\varepsilon = \frac{\sigma dx}{E}$

$$\varepsilon = \frac{Mv dx}{EI}$$

Maintenant, calcul de  $\theta$  :

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon}{v} \quad \text{soit} \quad \tan \theta = \frac{Mv dx}{EIv} = \frac{M dx}{EI}$$

Rayon de courbure local  $R$  :

$$R = \frac{dx}{\tan \theta} = \frac{dx EI}{M dx} \quad \text{puisque} \quad \frac{1}{\tan \theta} = \frac{EI}{M dx}$$

Finalement en éliminant  $dx$  :

$$R = \frac{EI}{M} \quad \text{à la position } x.$$

Comment calculer la flèche locale à partir du rayon de courbure ?

La fonction de cette courbe  $y = f(x)$  est toujours inconnue mais on sait calculer le rayon de courbure en  $x$  d'une courbe de fonction  $y = f(x)$  :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

La valeur de  $y'^2$  est négligeable, on admet que

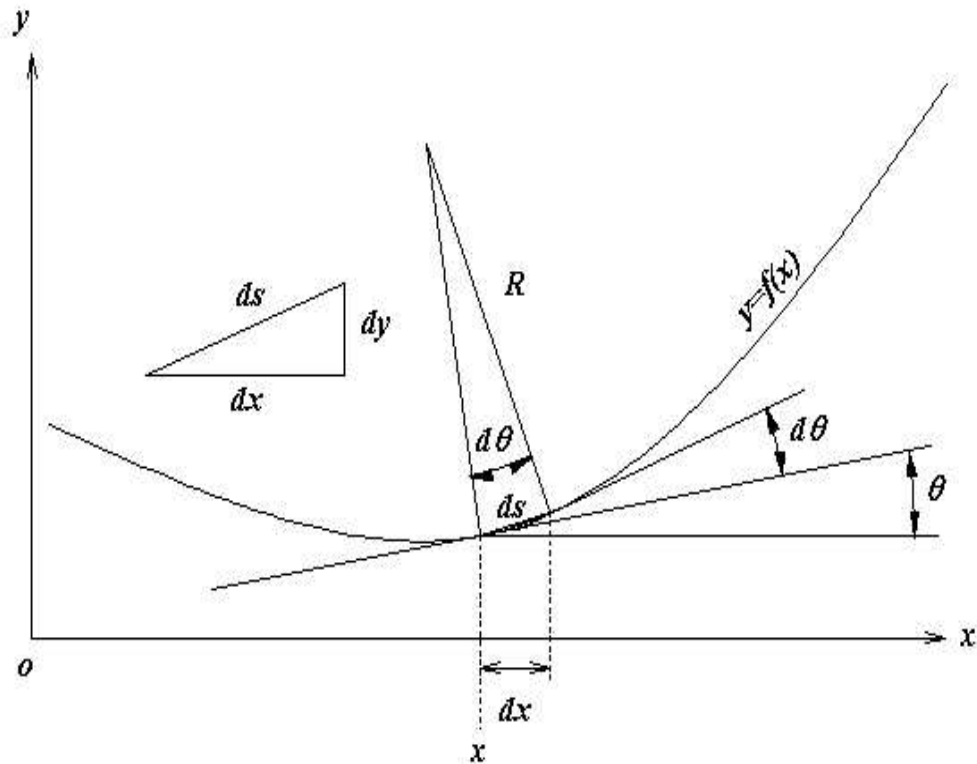
$$R = \frac{1}{y''} \quad \text{et comme vu plus haut} \quad R = \frac{EI}{M}$$

$y''$  étant la dérivée seconde de  $f(x) = f''(x)$  et

$y'' = \frac{M}{EI}$  ce qui permettra de déduire la valeur de  $y$  (la flèche) à l'endroit  $x$  de la poutre.

\*

### Rayon de courbure d'une courbe $y=f(x)$ à la position $x$



La fonction  $f(x)$  admet une dérivée  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  qui donne la tangente  $\theta(x)$  et permet le calcul de «  $ds$  ».  
[Pour  $\theta$  très petit,  $\theta \approx \arctan(\theta)$ ]

Ensuite  $\frac{ds}{d\theta} = R$  ou  $C = \frac{d\theta}{ds}$  (inverse du rayon de courbure) permet d'écrire par rapport à  $dx$  :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{ds} \quad (\text{dérivation de fonctions composées})$$

[  $y = g(u)$  avec  $u = f(x)$  ]

dérivée de  $g(u) = y'(x) = y'(u) \times u'(x)$  ])

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

- dérivée de  $\arctan(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2} \dots\dots\dots (y'(u))$

$$\text{dérivée de } \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- dérivée de  $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \dots\dots\dots (u'(x))$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \times y'' \dots\dots\dots (y'(x) \cdot u'(x))$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- Maintenant voyons  $\frac{dx}{ds} \dots\dots\dots \left(\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{ds}\right)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x).dx$$

$$ds^2 = dx^2 + (f'(x))^2 . dx^2$$

$$ds^2 = dx^2 (1 + (f'(x))^2)$$

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ puisque } f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ et } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Ensemble :

$$C = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Posons  $A = 1 + y'^2$

$$C = \frac{y''}{A \times \sqrt{A}}$$

$$[(A \times \sqrt{A})^2 = A^2 \times A = A^3 \dots\dots \sqrt{A^3} = A^{3/2}]$$

$$C = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

comme  $y'^2$  est négligeable :

$$C = y'' \text{ et } R = \frac{1}{y''} = \frac{EI}{M} \text{ ou}$$

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

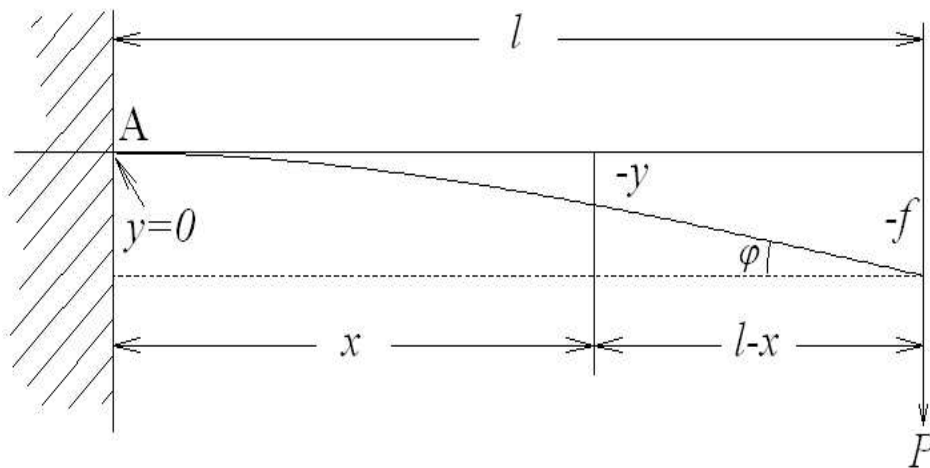
## Calcul de la flèche principe d'approche

$R = -\frac{1}{y''}$  avec le signe selon le sens de la courbure, et

également vu plus haut :  $R = -\frac{EI}{M}$ , on déduit de ces

considérations que  $y'' = \frac{-M}{EI}$  ....

### cas de la poutre en porte-à-faux (console)



$$M = -P(l-x)$$

$$y'' = -\frac{P(l-x)}{EI}$$

- Intégrons une première fois

$$EIy' = \frac{P(l-x)^2}{2} + C \text{ (constante d'intégration)}$$

Conditions aux limites, en A :  $x=0$  ;  $f'(0)=0$

$$EIy' = \frac{Pl^2}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{P(l-x)^2}{2} - \frac{Pl^2}{2}$$



$y'$  représente la pente de la tangente en  $x$

$$\text{Pour } x=l \Rightarrow \text{Tan}\varphi = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

- Intégrons une deuxième fois

$$EIy = -\frac{P(l-x)^3}{6} - \frac{Pl^2x}{2} + D$$

Conditions aux limites, en A :  $x=0$  ;  $f(0)=0$

$$EIy = -\frac{Pl^3}{6} - 0 + D = 0 \Rightarrow D = \frac{Pl^3}{6}$$

$$EIy = -\frac{P(l-x)^3}{6} - \frac{Pl^2x}{2} + \frac{Pl^3}{6}$$

développons :

$$EIy = \frac{P}{6} \left( -(l-x)^3 - 3l^2x + l^3 \right)$$

$$EIy = \frac{P}{6} \left( -(l^3 - x^3 - 3l^2x + 3lx^2) - 3l^2x + l^3 \right)$$

$$EIy = \frac{P}{6} \left( -l^3 + x^3 + 3l^2x - 3lx^2 - 3l^2x + l^3 \right)$$

$$EIy = \frac{P}{6} \left( x^3 - 3lx^2 \right) = \frac{Px^2}{6} (x - 3l)$$

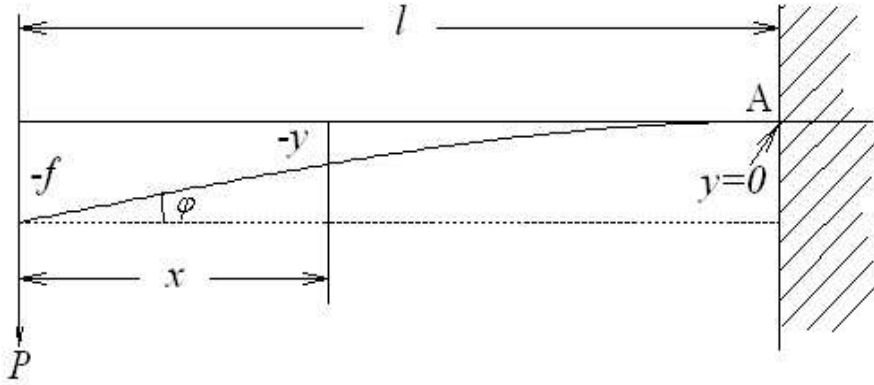
$$y = -\frac{Px^2}{6EI} (3l - x)$$

pour  $x=l$ , flèche maximum à la distance  $l$  :

$$y = -\frac{Pl^2}{6EI} (3l - l) = -\frac{Pl^2}{6EI} (2l) = -\frac{2Pl^3}{6EI}$$

$$f = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

On peut également prendre le problème de cette manière :



dans ce cas :

$$M = -Px$$

$$y''' = -\frac{Px}{EI}$$

- Intégrons une première fois

$$EIy' = -\frac{Px^2}{2} + C$$

Conditions aux limites, en A :  $x=l$  ;  $f'(l)=0$

$$EIy' = -\frac{Pl^2}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{Pl^2}{2}$$

$$EIy' = -\frac{Px^2}{2} + \frac{Pl^2}{2}$$

- Intégrons une deuxième fois

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2x}{2} + D$$

Conditions aux limites, en A :  $x=l$  ;  $f(l)=0$

$$EIy = -\frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^3}{2} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{3Pl^2x}{6} + \frac{Pl^3}{6} - \frac{3Pl^3}{6}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{3Pl^2x}{6} - \frac{2Pl^3}{6}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2}{6}(3x - 2l)$$

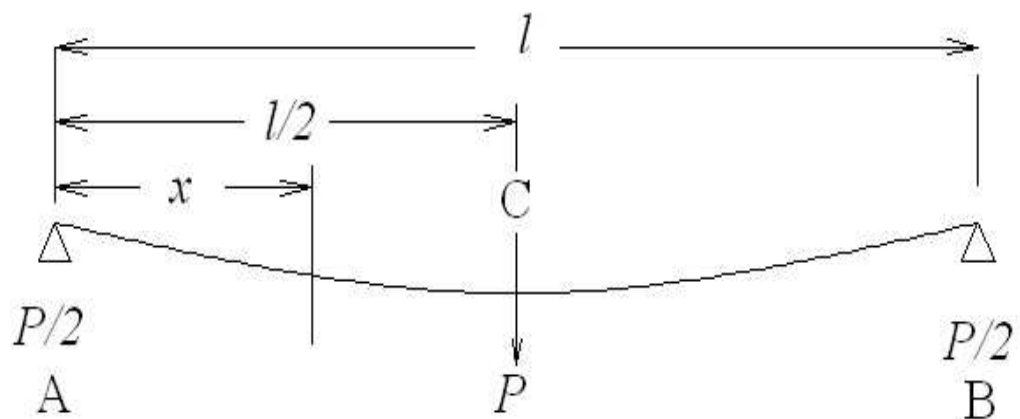
Pour  $x=0$  (flèche maxi) :

$$EIy = -\frac{2Pl^3}{6} \text{ et}$$

$$f_{\max i} = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

\*

**Cas de la poutre chargée en son milieu sur appuis simples.**



Dans le domaine de A à C :

$$M = \frac{Px}{2} \dots \dots \dots EI y' = \frac{Px^2}{4} + C \dots \dots T = \frac{P}{2}$$

Pour  $x = \frac{l}{2} \Rightarrow EIy' = 0$  (tangente = 0 au milieu de l)

$$EI y' = \frac{P}{4} \left( \frac{l}{2} \right)^2 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{Pl^2}{16}$$

$$EI y' = \frac{Px^2}{4} - \frac{Pl^2}{16}$$

Deuxième intégration :

$$EI y = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2 x}{16} + D \dots \text{ Pour } x = 0 \Rightarrow D = 0$$

flèche maxi pour  $x = \frac{l}{2}$  :

$$EI y = \frac{P}{12} \times \left( \frac{l}{2} \right)^3 - \frac{Pl^2}{16} \times \frac{l}{2} \Rightarrow EI y = \frac{Pl^3}{12 \times 8} - \frac{Pl^3}{8 \times 2 \times 2}$$

$$EI 8y = \frac{Pl^3}{12} - \frac{Pl^3}{4} \dots \dots EI 8y = \frac{-8Pl^3}{48}$$

$$f = -\frac{Pl^3}{48EI}$$

$$\text{Pour } x = \frac{l}{2} : M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

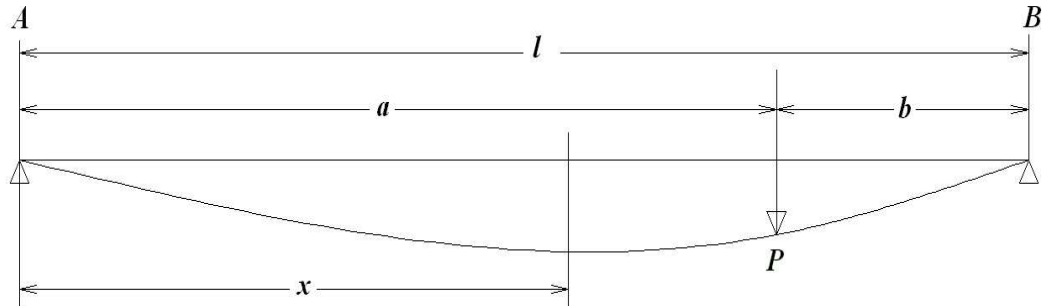
Ou en utilisant les consoles encastrees au milieu :

$$f = \frac{\frac{P}{2} \times \left( \frac{l}{2} \right)^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3EI} \Rightarrow f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

\*

## Cas d'une charge décentrée sur appuis simples

Prenons le problème avec  $a > b$



Réactions sur les appuis :

$$R_A = \frac{Pb}{l} ; R_B = \frac{Pa}{l}$$

En comptant de gauche à droite :

**Dans le domaine « a » :**  $m = \frac{Pbx}{l}$

$$y' EI = \frac{Pbx^2}{2l} + C_1 \text{ (tangente en } x)$$

$$y EI = \frac{Pbx^3}{6l} + C_1 x + D_1 \text{ (flèche en } x)$$

Pour  $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow D_1 = 0$

$$y EI = \frac{Pbx^3}{6l} + C_1 x$$

**Dans le domaine « b » :**  $m = \frac{Pbx}{l} - P(x - a)$

$$y' EI = \frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P(x - a)^2}{2} + C_2 \text{ (tangente en } x)$$

$$yEI = \frac{Pbx^3}{6l} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + D_2 \quad (\text{flèche en } x)$$

à la jonction des domaines, la tangente est partagée,

$$\text{soit } y'EI = \frac{Pbx^2}{2l} + C_1 = \frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2$$

Pour  $x = a$  :

$$\frac{Pba^2}{2l} + C_1 = \frac{Pba^2}{2l} + C_2 \quad \text{donc } C_1 = C_2 = C$$

**Flèches**

**Pour  $x = a$  : même flèche**

$$\frac{Pba^3}{6l} + Ca + D_1 = \frac{Pba^3}{6l} - \frac{P(a-a)^3}{6} + Ca + D_2$$

$$\frac{Pba^3}{6l} + D_1 = \frac{Pba^3}{6l} + D_2 \Rightarrow D_1 = D_2 = 0$$

**Pour  $x = l$  dans le domaine «  $b$  » ;  $y = 0$**

$$0 = \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{P(l-a)^3}{6} + Cl \quad \dots\dots\dots (l-a = b)$$

$$0 = \frac{Pbl^2}{6l} - \frac{Pb^3}{6l} + C \Rightarrow 0 = \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) + C$$

$$C = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)$$

**dans le domaine «  $a$  » flèche :**

$$yEI = \frac{Pbx^3}{6l} - \frac{Pbx}{6l}(l^2 - b^2)$$

$$yEI = \frac{Pbx}{6l}(x^2 - l^2 + b^2)$$

pour  $x = a$

$$yEI = \frac{Pba}{6l}(a^2 - l^2 + b^2)$$

$$b = l - a \Rightarrow b^2 = l^2 + a^2 - 2al$$

$$yEI = \frac{Pba}{6l}(a^2 - l^2 + l^2 + a^2 - 2al)$$

$$yEI = \frac{Pba}{6l}(2a^2 - 2al)$$

$$yEI = \frac{Pba}{3l}(a^2 - al)$$

$$yEI = \frac{Pba}{3l}a(a-l) \dots a-l = -b$$

$$yEI = -\frac{Pba^2}{3l}b \text{ et } y = -\frac{Pa^2b^2}{3EI} \text{ OK}$$

**Pour**  $x = \frac{l}{2}$  **et**  $b = \frac{l}{2}$  on devrait trouver  $y = \frac{Pl^3}{48EI}$

$$yEI = \frac{Pbx}{6l}(x^2 - l^2 + b^2)$$

$$yEI = \frac{P}{6l} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \left( \frac{l^2}{4} - l^2 + \frac{l^2}{4} \right)$$

$$yEI = \frac{Pl}{24} \left( \frac{2l^2}{4} - \frac{4l^2}{4} \right) \Rightarrow yEI = \frac{Pl}{24} \left( -\frac{2l^2}{4} \right)$$

$$yEI = \frac{2Pl^3}{96} \text{ et } y = \frac{Pl^3}{48EI} \text{ OK}$$

**Flèche maxi** : trouver la valeur de x pour  $y' = 0$

$$y' = \frac{Pbx^2}{2l} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) = 0$$

$$y' = \frac{Pb}{2l} \left( x^2 - \frac{l^2 - b^2}{3} \right) = 0$$

$$x^2 - \frac{l^2 - b^2}{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

Quelle sera la valeur de la flèche maximum pour

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} ?$$

$$yEI = \frac{Pbx}{6l} (x^2 - l^2 + b^2)$$

$$yEI = \frac{Pb\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}}{6l} \left( \frac{l^2 - b^2}{3} - (l^2 - b^2) \right)$$

$$yEI = \frac{Pb\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}}{6l} \left( \frac{l^2 - b^2}{3} - \frac{3(l^2 - b^2)}{3} \right)$$

$$yEI = \frac{Pb\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}}{6l} \left( -\frac{2(l^2 - b^2)}{3} \right)$$

$$yEI = \frac{Pb\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}}{3l} \left( -\frac{(l^2 - b^2)}{3} \right)$$

$$yEI = \frac{Pb\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \left( -\frac{(l^2 - b^2)}{3} \right)^2}{3l}$$

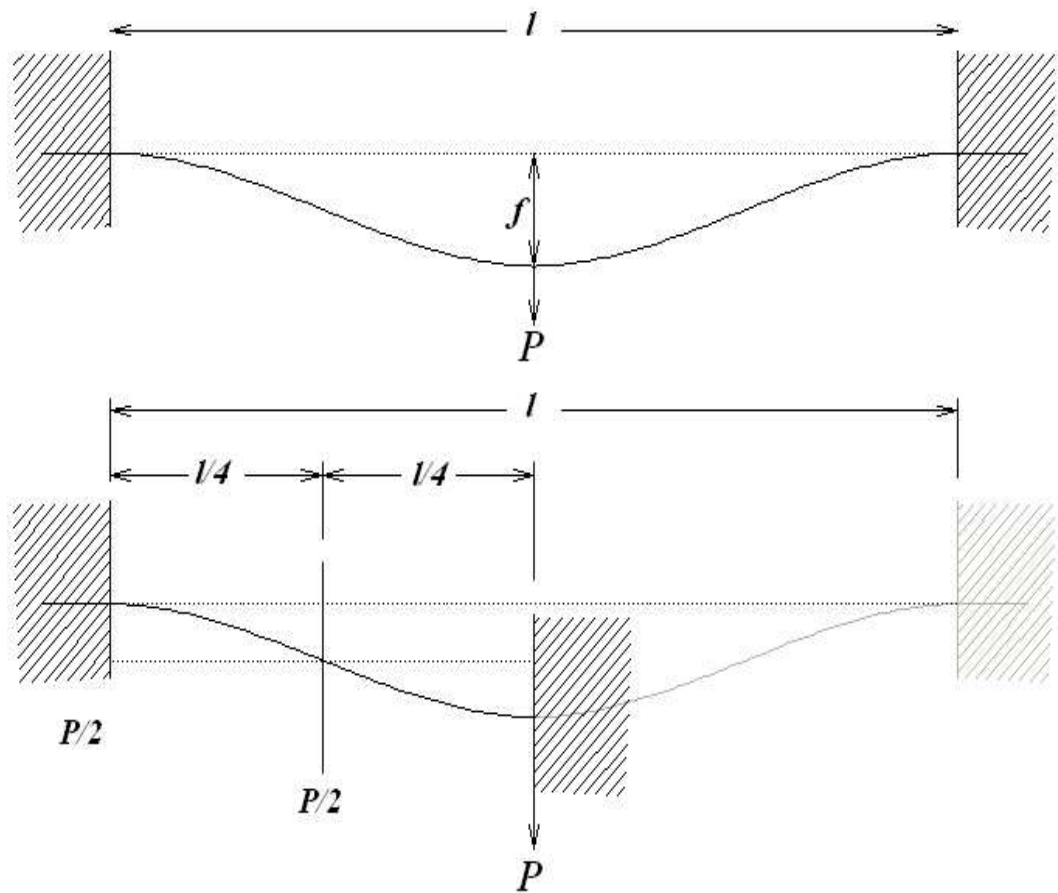


$$yEI = \frac{Pb \sqrt{\left(-\frac{(l^2 - b^2)}{3}\right)^3}}{3l}$$

$$y = -\frac{Pb \left(\frac{l^2 - b^2}{3}\right)^{3/2}}{3EI}$$

\*

**Cas de la poutre encastrée**  
en ses extrémités et chargée ponctuellement au centre.



Le cas peut résumer de cette manière par 4 consoles liées bout à bout.

$$M_{\max} = \frac{P}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8} \text{ aux « encastremements »}$$

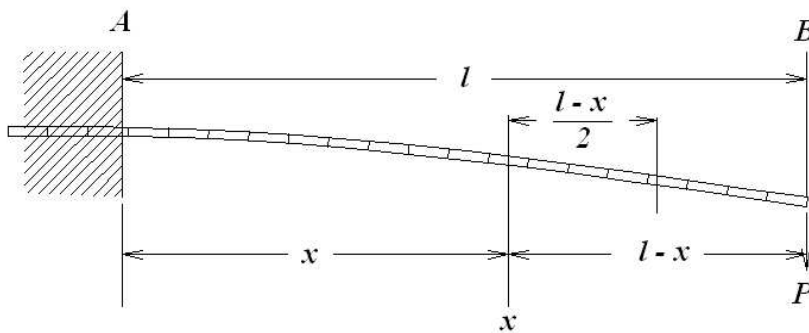
La flèche d'une console sera égale à  $f_1 = \frac{P}{2} \times \left(\frac{l}{4}\right)^3$

La deuxième console affichera également cette flèche, ce qui donne pour toute la poutre  $f = 2f_1$  et :

$$f = \frac{2 \frac{P}{2} \times \left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EI} = \frac{P \times \frac{l^3}{64}}{3EI} \Rightarrow f = \frac{Pl^3}{192EI}$$

\*

### Cas de la console uniformément chargée par une masse = $pl$



Le calcul du moment de flexion en  $x$  considère la charge jusqu'à  $x$  multipliée par la position de son CG,

soit  $x/2$  soit  $m = px \times \frac{x}{2} = \frac{px^2}{2}$ . Le moment( $x$ ) est à cal-

culer avec la charge répartie à droite de  $x$  :

$$M = -\frac{p(l-x)^2}{2} \dots\dots\dots \text{Pour } x=0 ; M_{\max} = -\frac{pl^2}{2}$$

$$EIy' = -\frac{p(l-x)^3}{6} + C$$

Pour  $x = 0, y' = 0$  (tangente = 0)

$$EIy' = 0 = -\frac{pl^3}{6} + C \Rightarrow C = \frac{pl^3}{6}$$

$$EIy' = -\frac{p(l-x)^3}{6} + \frac{pl^3}{6} \Rightarrow -\frac{p}{6} [(l-x)^3 - l^3]$$

$$EIy = \frac{p(l-x)^4}{24} + \frac{pl^3x}{6} + D$$

Pour  $x = 0, y = 0$  (flèche = 0)

$$EIy = 0 = \frac{pl^4}{24} + D \Rightarrow D = -\frac{pl^4}{24}$$

$$EIy = \frac{p(l-x)^4}{24} + \frac{pl^3x}{6} - \frac{pl^4}{24}$$

$$EIy = \frac{p(l-x)^4}{24} + \frac{4pl^3x}{24} - \frac{pl^4}{24}$$

$$EIy = \frac{p}{24} [(l-x)^4 + 4l^3x - l^4]$$

Pour  $x=l$ , flèche maximum :

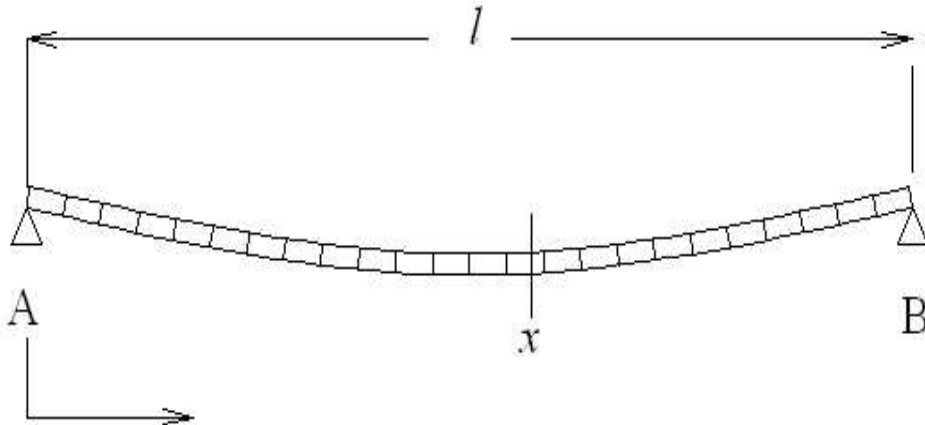
$$EIy = \frac{p}{24} [(l-l)^4 + 4l^3l - l^4] = \frac{p}{24} [3l^4]$$

$$f = \frac{pl^4}{8EI}$$

\*

## Cas de la poutre uniformément chargée

par une masse  $p \times$  unité de longueur sur appuis simples.



$$R_A = \frac{pl}{2}$$

$$M = R_A x - px \times \frac{x}{2} = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{px(l-x)}{2} ;$$

$$\text{Pour } x = \frac{l}{2} : M = \frac{pl}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$M = \frac{pl^2}{4} - \frac{pl^2}{8} = \frac{2pl^2}{8} - \frac{pl^2}{8}$$

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

Intégrons une première fois :

$$EIy' = \frac{plx^2}{4} - \frac{px^3}{6} + C$$

Intégrons une deuxième fois.

$$EIy = \frac{plx^3}{12} - \frac{px^4}{24} + Cx + D$$

Conditions aux limites :  $f(0)=f(l)=0$  (flèches = 0)

Pour  $x = 0$  :

$$EIy = D \Rightarrow D = 0$$

Pour  $x = l$  :

$$EIy = \frac{pl^4}{12} - \frac{pl^4}{24} + Cl = 0$$

$$EIy = \frac{2pl^4}{24} - \frac{pl^4}{24} + Cl = 0$$

$$Cl = -\frac{pl^4}{24} \Rightarrow C = -\frac{pl^4}{24l} = -\frac{pl^3}{24}$$

$$EIy = \frac{2plx^3}{24} - \frac{px^4}{24} - \frac{pxl^3}{24}$$

$$24EIy = 2plx^3 - px^4 - pxl^3$$

$$24EIy = px(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

$$y = \frac{px}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

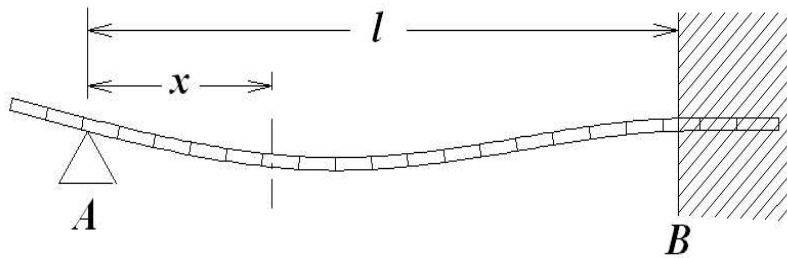
Pour  $x=l/2$ , flèche maximum :

$$EIy = \frac{pl}{48} \left[ 2l \left( \frac{l}{2} \right)^2 - \left( \frac{l}{2} \right)^3 - l^3 \right]$$

$$EIy = \frac{pl}{48} \left[ \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{8} - l^3 \right] = \frac{pl}{48} \times \frac{-5l^3}{8}$$

$$f = \frac{-5pl^4}{384EI}$$

**Cas de la poutre uniformément chargée par une masse  $p \times$  unité de longueur, encastrée sur une extrémité et appuyée sur l'autre**



$$\text{Couple } M(x) = RA \cdot x - \frac{px^2}{2}$$

On ne connaît pas la valeur de la réaction RA en A, ni celle de RB en B.

Essayons les équations de la ligne élastique :

$$EIy'' = RA \cdot x - \frac{px^2}{2} ; \quad EIy' = RA \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C$$

pour  $x = l$ ,  $y' = 0$  si on considère que l'encastrement est parfait et que la tangente en B de ligne élastique est égale à zéro.

$$0 = RA \frac{l^2}{2} - \frac{pl^3}{6} + C \Rightarrow C = -RA \frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6} \quad (1)$$

$$\text{donc : } EIy' = RA \frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} - RA \frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6}$$

Calcul de la flèche ;

$$EIy = RA \frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - RA \frac{l^2 x}{2} + \frac{pl^3 x}{6} + D$$

$$\text{Pour } x = 0, y = 0 \Rightarrow D = 0$$

Pour  $x = l, y = 0$

$$\Rightarrow 0 = RA \frac{l^3}{6} - \frac{pl^4}{24} - RA \frac{l^3}{2} + \frac{pl^4}{6}$$

$$0 = RA \left( \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right) - pl^4 \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \right)$$

$$0 = RA \left( \frac{2l^3 - 6l^3}{12} \right) - pl^4 \left( \frac{1-4}{24} \right)$$

$$0 = RA \left( \frac{l^3 - 3l^3}{6} \right) - pl^4 \left( \frac{-3}{24} \right)$$

$$0 = RA \frac{-l^3}{3} + pl^4 \frac{3}{24}$$

$$RA \frac{l^3}{3} = pl^4 \frac{3}{24} \Rightarrow RA = pl^4 \frac{3}{24} \times \frac{3}{l^3}$$

$$\text{Finalement } RA = \frac{3pl}{8}$$

### **Variante pour le calcul de RA**

Imaginons que le support en A n'existe pas.

$$\text{La flèche serait : } f = -\frac{pl^4}{8EI}$$

$pl^4$  peut s'écrire  $Pl^3$  dans la mesure où  $P = pl$

$$\text{et } f = -\frac{Pl^3}{8EI} \quad (2)$$

Quelle charge ponctuelle  $P_v$  appliquée au bout de la même poutre donnerait la même flèche ? Le cas revient à celui de la console chargée au bout de la portée  $l$  qui donnerait

$$f = -\frac{P_v l^3}{3EI} \text{ d'où il ressort que } P_v = \frac{3EIf}{l^3} = RA$$

Remplaçons  $f$  par l'équation (2)

$$P_v = \frac{3EI}{l^3} \times -\frac{Pl^3}{8EI} = -\frac{3P}{8} = RA.$$

Comme  $P = pl \Rightarrow RA = \frac{3pl}{8}$ , exactement comme nous l'avions calculé.

\*

En reprenant l'équation (1) :  $C = -RA \frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6}$

$$C = -\frac{3pl}{8} \times \frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6} = -\frac{3pl^3}{16} + \frac{pl^3}{6}$$

$$C = pl^3 \left( -\frac{3}{16} + \frac{1}{6} \right) = pl^3 \left( \frac{-18+16}{96} \right) = pl^3 \left( \frac{-9+8}{48} \right)$$

$$C = -\frac{pl^3}{48}$$

L'équation  $y=f(x)$  donne une dérivée horizontale = zéro pour la flèche maximale soit ;

$$EIy' = RA \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C = 0$$

$$EIy' = \frac{3pl}{8} \times \frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} - \frac{pl^3}{48} = 0$$

$$\frac{3plx^2}{16} - \frac{px^3}{6} - \frac{pl^3}{48} = 0$$

$$\frac{9plx^2}{48} - \frac{8px^3}{48} - \frac{pl^3}{48} = 0$$

$$\text{Finalement } 9plx^2 - 8px^3 - pl^3 = 0$$

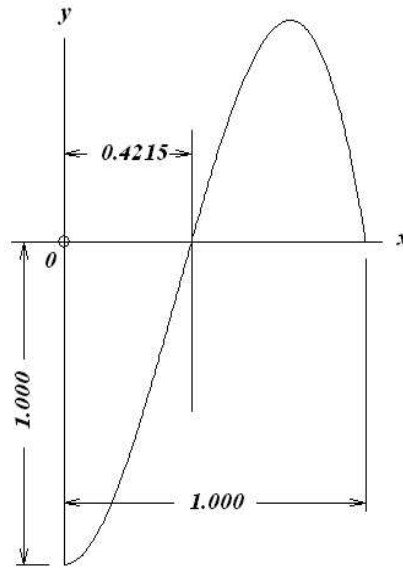
$$\text{Ou } 9lx^2 - 8x^3 - l^3 = 0$$

$$\text{Et encore pour } l=1 \Rightarrow -8x^3 + 9x^2 - 1 = 0$$

Les solutions d'une équation du 3<sup>ème</sup> degré ne sont pas



toujours évidentes ni simples. Une méthode expéditive consiste à tracer par informatique le graphe de la fonction , ici  $y = -8x^3 + 9x^2 - 1$ , ce qui fait immédiatement apparaître les valeurs des racines pour  $y=0$  :  $x_1=0,4215$  et  $x_2 = 1$ , ce qui était évident pour  $x_2$ . (Résolution algébrique en fin de volume)



### Calcul de la flèche maxi

$$EIy = RA \frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} + Cx$$

$$EIy = \frac{3pl}{8} \times \frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - \frac{pl^3x}{48}$$

$$EIy = \frac{3plx^3 - 2px^4 - pl^3x}{48}$$

$$f = \frac{p(3lx^3 - 2x^4 - l^3x)}{48EI}$$

avec  $x = 0,4215.l$

$$f_{\max} = \frac{p(3l \times 0,07488l^3 - 2 \times 0,03146l^4 - l^3 \times 0,4215l)}{48EI}$$

$$f_{\max} = \frac{p(l \times 0,22464l^3 - 0,06292l^4 - l^3 \times 0,4215l)}{48EI}$$

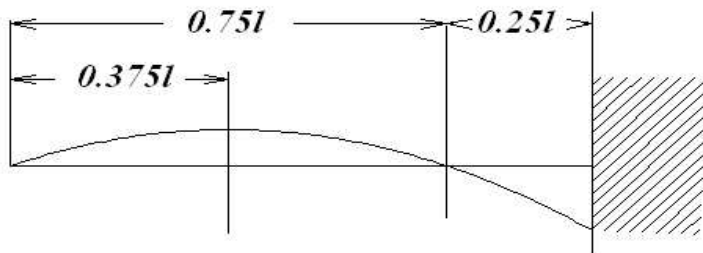
$$f_{\max} = \frac{p(0,22464l^4 - 0,06292l^4 - 0,4215l^4)}{48EI}$$

$$f_{\max} = \frac{p(-0,2598l^4)}{48EI}$$

$$f_{\max} = \frac{-pl^4}{185EI}$$

### Moments :

Courbe des moments de flexion :



$$M(x) = RA \cdot x - \frac{px^2}{2} \text{ soit } M(x) = \frac{3plx}{8} - \frac{px^2}{2}$$

$$M(x) \text{ pour } \frac{dM}{dx} = 0 :$$

$$\frac{3pl}{8} - px = 0 \Rightarrow \frac{3pl}{8} = px \Rightarrow 3pl = 8px \Rightarrow x = \frac{3l}{8}$$

$$M\left(\frac{3l}{8}\right) = \frac{3pl}{8} \times \frac{3l}{8} - \frac{p}{2} \times \left(\frac{3l}{8}\right)^2 = \frac{9pl^2}{64} - \frac{9pl^2}{128}$$

$$\frac{3l}{8} = 0,375l \Rightarrow M(0,375l) = \frac{9pl^2}{128}$$

La courbe présente une inversion pour  $x = 0,75 l$  où le moment est égal à zéro.

En effet :

$$M(x) = \frac{3plx}{8} - \frac{px^2}{2}, \text{ pour } p=1 \text{ et } l=1 :$$

$$M(x) = \frac{3x}{8} - \frac{x^2}{2} = \frac{3x - 4x^2}{8}$$

Ou  $-0,5x^2 + 0,375x = 0$  pour  $M(x)=0$

2 racines :  $x=0$  et  $x = 0,75 l$

**Moment max pour  $x = l$  :**

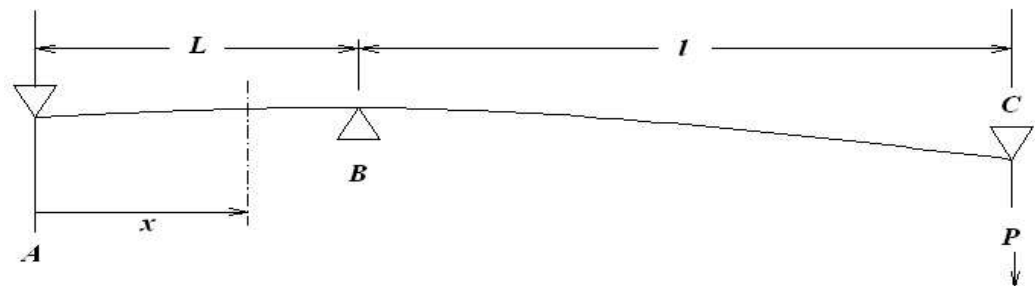
$$M(x) = \frac{3plx}{8} - \frac{px^2}{2} \Rightarrow M \text{ max} = \frac{3pl^2}{8} - \frac{pl^2}{2}$$

$$M \text{ max} = \frac{3pl^2 - 4pl^2}{8} \Rightarrow M \text{ max} = \frac{-pl^2}{8}$$

\*

### Gouvernail suspendu

I - Flèches pour une mèche de section constante théorique



La mèche est maintenue entre ses paliers  $A$  et  $B$ .

Le barycentre se situe à la distance «  $l$  » de  $B$  sur le sa-

fran qui supporte la force  $P$ .

Équilibre des moments et réactions sur les appuis :

$$Pl = RA \times L \Rightarrow RA = \frac{Pl}{L} \quad \text{et} \quad RB = RA + P = \frac{Pl}{L} + P$$

**Flèches entre A et B :**

$$m = RAx = \frac{Plx}{L}$$

$$EIy' = \frac{Plx^2}{2L} + C \quad : \text{ première intégration}$$

$$EIy = \frac{Plx^3}{6L} + Cx + D \quad : \text{ deuxième intégration}$$

$$\text{Pour } x = 0 ; EIy = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$EIy = \frac{Plx^3}{6L} + Cx$$

$$\text{Pour } x = L ; EIy = 0$$

$$0 = \frac{PlL^3}{6L} + CL \Rightarrow 0 = \frac{PlL^2}{6} + CL \Rightarrow \frac{PlL^2}{6} = -CL$$

$$\text{Divisons les 2 termes par } L : \frac{PlL}{6} = -C$$

$$C = -\frac{PlL}{6}$$

qui donne la flèche pour tout  $x$  :

$$EIy = \frac{Plx^3}{6L} - \frac{PlLx}{6} \quad \text{ou} \quad EIy = \frac{Plx}{6} \left( \frac{x^2}{L} - L \right)$$

Maintenant que nous connaissons le constante  $C$ , re-

$$\text{venons à notre tangente } EIy' = \frac{Plx^2}{2L} - \frac{PlL}{6}$$

Angle au palier A pour  $x = 0$  :  $\alpha = -\frac{PIL}{6EI}$

Angle au palier B pour  $x = L$  :

$$\beta = \frac{PIL^2}{2L} - \frac{PIL}{6} = \frac{PIL}{2} - \frac{PIL}{6} = \frac{6PIL - 2PIL}{12} = \frac{4PIL}{12}$$

$$\beta = \frac{PIL}{3EI}$$

Flèche maxi entre A et B : cherchons la valeur de  $x$  lorsque  $EIy' = 0$  (tangente = 0)

$$\frac{Plx^2}{2L} - \frac{PIL}{6} = 0 \Rightarrow \frac{Plx^2}{2L} = \frac{PIL}{6} \text{ et } x^2 = \frac{2LPIL}{6Pl} = \frac{2L^2}{6} = \frac{L^2}{3}$$

$$x = \pm \frac{L}{\sqrt{3}}$$

flèche maxi pour  $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$  :

$$EIf = \frac{Plx^3}{6L} - \frac{PlLx}{6} \Rightarrow EIf = \frac{Pl}{6L} \left( \frac{L}{\sqrt{3}} \right)^3 - \frac{PIL}{6} \times \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( \frac{Pl}{6L} \left( \frac{L}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{PIL}{6} \right) \Rightarrow EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( \frac{Pl}{6L} \left( \frac{L^2}{3} \right) - \frac{PIL}{6} \right)$$

$$EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( \frac{PIL}{18} - \frac{PIL}{6} \right) \Rightarrow EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( \frac{PIL}{18} - \frac{3PIL}{18} \right)$$

$$EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( -\frac{2PIL}{18} \right)$$

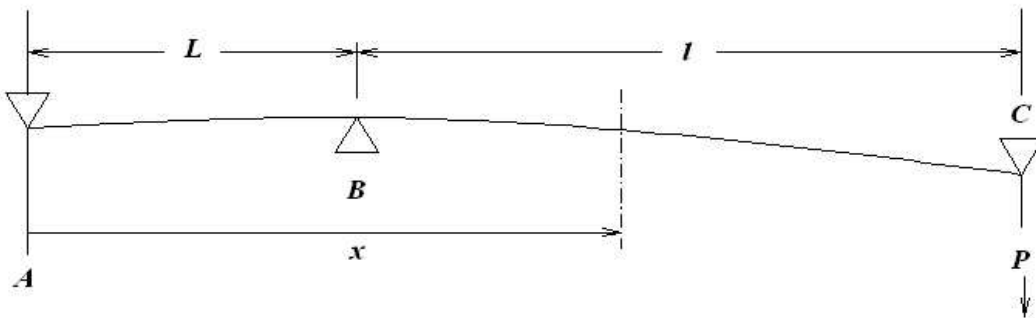
$$EIf = \frac{L}{\sqrt{3}} \left( -\frac{PIL}{9} \right) \Rightarrow -\frac{PIL^2}{9\sqrt{3}}$$

$$f_{\max} = \pm \frac{PL^2}{EI} \times \frac{l}{9\sqrt{3}}$$

$\pm$  selon le sens de la flèche.

Remarque : la flèche est mesurée depuis la droite re-joignant les points A et B

**Entre B et C :** (même remarque)



$$m = RAx - RB(x - L)$$

$$RA = \frac{Pl}{L} ; RB = RA + P = \frac{Pl}{L} + P$$

$$m = \frac{Plx}{L} - \left( \frac{Pl}{L} + P \right) (x - L)$$

$$m = \frac{Plx}{L} - \left( \frac{Plx}{L} - \frac{PlL}{L} + Px - PL \right)$$

$$m = \frac{Plx}{L} - \frac{Plx}{L} + \frac{PlL}{L} - Px + PL$$

$$m = Pl - Px + PL$$

$$EIy' = Plx - \frac{Px^2}{2} + PLx + C$$

$$\text{ou } EIy' = -\frac{Px^2}{2} + Plx + PLx + C$$

Nous connaissons la pente de la ligne élastique entre A

$$\text{et B} : : EIy' = \frac{Plx^2}{2L} - \frac{PIL}{6}$$

Pour  $x = L$  (jonction des domaines)

$$EIy' = \frac{PL^2}{2L} - \frac{PIL}{6} \Rightarrow EIy' = \frac{PIL}{2} - \frac{PIL}{6} \Rightarrow EIy' = \frac{PIL}{3}$$

comme nous l'avons déjà vu ci-dessus.

En conséquence, pour  $x = L$  nous avons :

$$EIy' = -\frac{PL^2}{2} + PIL + PLL + C = \frac{PIL}{3}$$

$$EIy' = -\frac{PL^2}{2} + PIL + PL^2 + C = \frac{PIL}{3}$$

$$EIy' = -\frac{PL^2}{2} + \frac{3PIL}{3} + \frac{2PL^2}{2} + C = \frac{PIL}{3}$$

$$EIy' = \frac{PL^2}{2} + \frac{2PIL}{3} + C = 0$$

$$\text{D'où il ressort que } C = -\frac{PL^2}{2} - \frac{2PIL}{3}$$

$$EIy' = -\frac{Px^2}{2} + Plx + PLx - \frac{PL^2}{2} - \frac{2PIL}{3}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} + \frac{PLx^2}{2} - \frac{PL^2x}{2} - \frac{2PILx}{3} + D$$

Pour  $x = L$  ;  $EIy = 0$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + \frac{PIL^2}{2} + \frac{PL^3}{2} - \frac{PL^3}{2} - \frac{2PIL^2}{3} + D$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + \frac{3PIL^2}{6} + \frac{3PL^3}{6} - \frac{3PL^3}{6} - \frac{4PIL^2}{6} + D$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} - \frac{PlL^2}{6} + D$$

$$D = \frac{PL^3}{6} + \frac{PlL^2}{6}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} + \frac{PLx^2}{2} - \frac{PL^2x}{2} - \frac{2PlLx}{3} + \frac{PL^3}{6} + \frac{PlL^2}{6}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{3Plx^2}{6} + \frac{3PLx^2}{6} - \frac{3PL^2x}{6} - \frac{4PlLx}{6} + \frac{PL^3}{6} + \frac{PlL^2}{6}$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} + \frac{3Plx^2}{6} + \frac{3PLx^2}{6} - \frac{3PL^2x}{6} - \frac{4PlLx}{6} + \frac{PL^3}{6} + \frac{PlL^2}{6}$$

$$EIy = \frac{Px}{6}(-x^2 + 3lx + 3Lx - 3L^2 - 4lL) + \frac{PL^3}{6} + \frac{PlL^2}{6}$$

$$EIy = \frac{Px}{6}(-x^2 + 3lx + 3Lx - 3L^2 - 4lL) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

Pour  $x = (L+l)$  (au bout du porte-à-faux) :

$$EIy = \frac{P(L+l)}{6}(-(L+l)^2 + 3l(L+l) + 3L(L+l) - 3L^2 - 4lL) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P(L+l)}{6}(-(L^2 + l^2 + 2lL) + 3lL + 3l^2 + 3L^2 + 3lL) - 3L^2 - 4lL) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P(L+l)}{6}(-L^2 - l^2 - 2lL + 3lL + 3l^2 + 3L^2 + 3lL - 3L^2 - 4lL) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P(L+l)}{6}(-L^2 - l^2 + 3l^2) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P}{6}(L+l)(-L^2 + 2l^2) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P}{6}(-L^3 + 2Ll^2 - lL^2 + 2l^3) + \frac{P}{6}(L^3 + lL^2)$$

$$EIy = \frac{P}{6}(-L^3 + 2Ll^2 - lL^2 + 2l^3 + L^3 + lL^2)$$



$$EIy = \frac{P}{6}(+2Ll^2 + 2l^3)$$

$$EIy = \frac{Pl^2}{3}(L+l)$$

$$f_{enbout} = \frac{Pl^2}{3EI}(L+l)$$

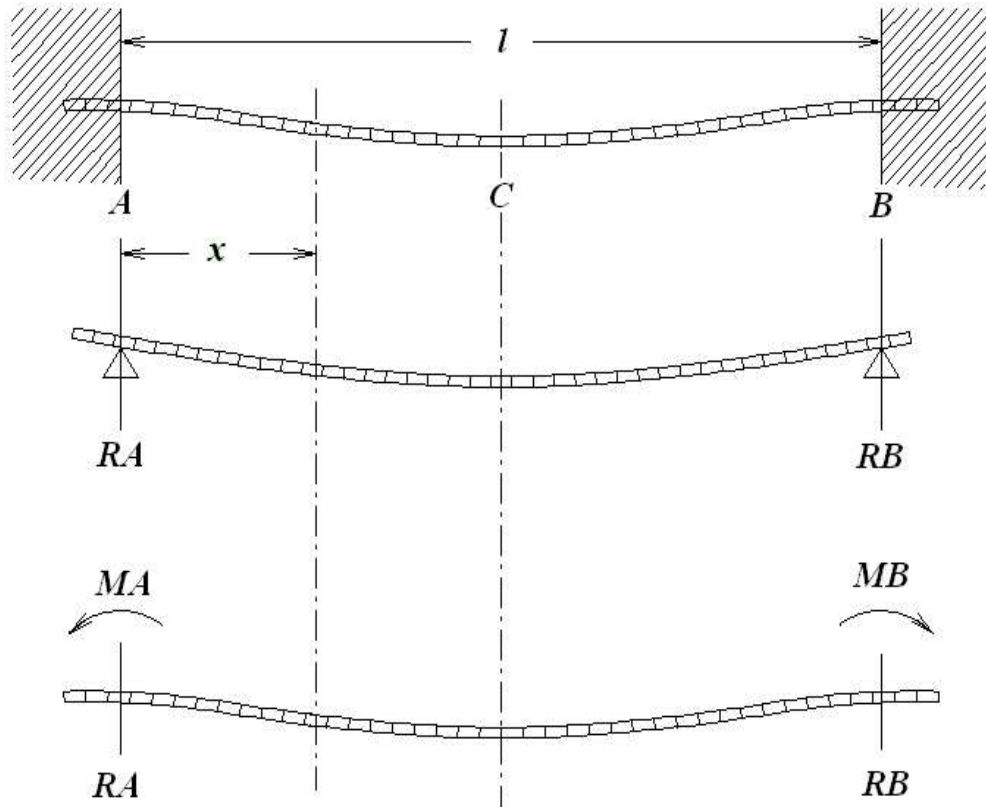
Un gouvernail n'est pas constitué d'une mèche de section constante de haut en bas, certes non...

Les calculs ci-dessus donnent un idée sans plus.

Pour gagner du poids, on réduira les diamètres en haut et en bas en gardant le maximum au palier B, le plus sollicité. Ensuite on prévoit des paliers autoalignants qui acceptent les angles de flexion.

\*

**Cas de la poutre uniformément chargée** par une masse  $p \times$  unité de longueur et encastrée en ses extrémités.



On considère le cas d'une poutre en simple appui sur laquelle on applique des couples  $MA$  et  $MB$  au niveau des appuis. Les encastremets sont supposés parfaits, c'est-à-dire que l'angle de la ligne élastique est égal à zéro en  $A$  et en  $B$  (et en  $C$ ). Charge totale =

$$pl \dots \dots \dots RA = RB = \frac{pl}{2}$$

Couples  $MA = MB$  en  $A$  et  $B$

On cherche à connaître la valeur des couples  $MA$  et  $MB$  à partir des équations de la ligne élastique puisque  $y' = 0$  pour  $x=0$  ou  $x = l/2$  ou  $x = l$ .

Moment en  $x$  pour la poutre en appui simple :

$$RA.x - \frac{px}{2}x = RA.x - \frac{px^2}{2}$$

$$\text{Moment total avec } MA : RA.x - \frac{px^2}{2} - MA$$

Équations de la ligne élastique :

$$EI.y'' = RA.x - \frac{px^2}{2} - MA ;$$

$$EI.y' = RA.\frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} - MA.x + C$$

$$\text{En A : } x=0 ; y'=0 \text{ (tangente = 0)} \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Flèche : } EI.y = RA.\frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - MA.\frac{x^2}{2} + D$$

$$\text{En A : } x=0 ; y=0 \text{ (flèche = 0)} \Rightarrow D = 0$$

$$EI.y = RA.\frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - MA.\frac{x^2}{2}$$

.....

Reprenons  $y'$  :

Pour  $x = l$  ,  $y' = 0$  en B

$$\text{Soit } RA.\frac{l^2}{2} - \frac{pl^3}{6} - MB.l = 0$$

$$RA = \frac{pl}{2} \Rightarrow \frac{pl}{2} \times \frac{l^2}{2} - \frac{pl^3}{6} - MB.l = 0$$

$$\frac{pl^3}{4} - \frac{pl^3}{6} - MB.l = 0$$

$$\frac{6pl^3}{24} - \frac{4pl^3}{24} - MB.l = 0$$

$$\frac{pl^3}{12} - MB \cdot l = 0 \quad \text{et} \quad MB = \frac{pl^2}{12} = MA$$

finalement  $MA = \frac{pl^2}{12}$

Reprenons l'équation du moment fléchissant

$$M = RA \cdot x - \frac{px^2}{2} - MA \dots\dots\dots M = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} - \frac{pl^2}{12}$$

Soit  $M = \frac{p}{12} [6(lx - x^2) - l^2]$  ou  $M = \frac{px}{2}(l - x) - \frac{pl^2}{12}$

Pour  $x=0$  ou  $x = l$  (aux encastremets) :

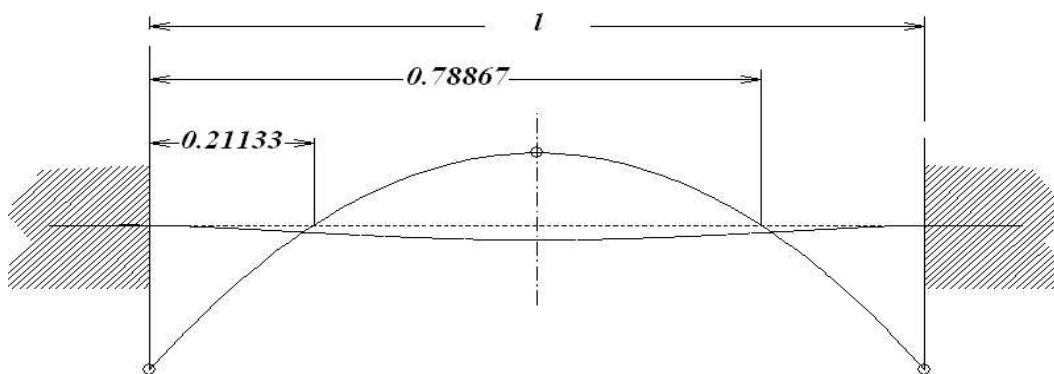
$$M_{\max} = -\frac{pl^2}{12} \quad \underline{\text{Moment maximum}}$$

Pour  $x = \frac{l}{2}$  :

$$M = \frac{pl}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \times \frac{l^2}{4} - \frac{pl^2}{12} \dots\dots\dots M = \frac{pl^2}{4} - \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{12}$$

$$M = \frac{6pl^2}{24} - \frac{3pl^2}{24} - \frac{2pl^2}{24}$$

$$M = \frac{pl^2}{24}$$



Courbe des moments  $M = \frac{p}{12} [6(lx - x^2) - l^2]$  trouvons

les racines de  $0 = -6x^2 + 6x - 1$  pour  $l = 1$  avec  
 $a = -6$  ;  $b = 6$  et  $c = -1$

$$x_1 \text{ et } x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (4 \times -6 \times -1)}}{-12} \text{ ou } \frac{6 \pm \sqrt{12}}{12} \times l$$

qui donne :  $x_1 = 0,21133 \times l$  et  $x_2 = 0,78867 \times l$

Endroits pour lesquels le moment de flexion est nul.

On remarque que les contraintes de flexion changent de signe tout au long de la poutre ; la partie en compression passe en traction au-delà de  $0,21133 \times l$  puis revient en compression après  $0,78867 \times l \dots$  La force de cisaillement est maximum lorsque la contrainte de flexion est nulle.

**Flèche :**

$$EI.y = RA.\frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - MA.\frac{x^2}{2}$$

$$EI.y = \frac{pl}{2} \times \frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} - \frac{pl^2}{12} \times \frac{x^2}{2}$$

$$EI.y = \frac{plx^3}{12} - \frac{px^4}{24} - \frac{pl^2x^2}{24}$$

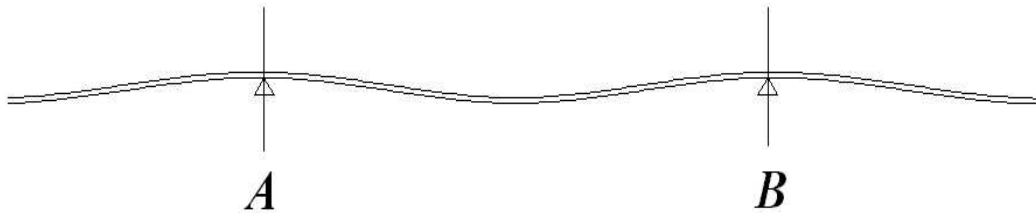
$$f = \frac{px^2(2lx - x^2 - l^2)}{24EI}$$

Flèche maxi en C pour  $x = \frac{l}{2}$

$$EI.y = \frac{pl}{12} \times \frac{l^3}{8} - \frac{p}{24} \times \frac{l^4}{16} - \frac{pl^2}{24} \times \frac{l^2}{4}$$

$$EI \cdot y = \frac{pl^4}{96} - \frac{pl^4}{384} - \frac{pl^4}{96} \dots \dots \dots f = -\frac{pl^4}{384EI}$$

Ce cas de charge est retenu par les normes pour les applications qui nous occupent principalement dans la conception des navires d'une manière simplifiée.



Les surfaces de la peau du navire sont supportées par des renforts (ici *A et B*). Il s'agit des bordés de la coque et du pont. On considère que les bordés sont encastres en *A* et en *B*. La contrainte maximale s'applique donc en traction sur la fibre extérieure au droit des supports.

Ci-dessous, formule imposée dans la norme ISO 12215-5 pour les panneaux de bois ou de contreplaqué :

$$t = b \times \sqrt{\frac{p \times k_2}{1000 \times \sigma_d}}$$

avec

*t* = épaisseur du panneau en mm

*b* = plus petite portée entre les supports en mm

*p* = pression uniforme en kN/m<sup>2</sup>

*k*<sub>2</sub> = coefficient égal à 0,5 dans notre cas

$\sigma_d$  = contrainte maxi admissible en N/mm<sup>2</sup>

Voyons de ce que cela signifie...

La largeur du panneau est prise égale à 1 mm et sa portée égale à «  $b$  » :

Nous avons vu que la contrainte  $\sigma = \frac{M}{\frac{I}{v}}$  où

$$\frac{I}{v} = \frac{t^3}{12} \times \frac{2}{t} = \frac{t^2}{6} \text{ puisque } v = \frac{t}{2} \text{ et la largeur} = 1$$

$$\sigma = \frac{6M}{t^2} \text{ et } t^2 = \frac{6M}{\sigma}$$

$$M = \frac{pb^2}{12} \text{ pour un panneau encastré comme dessiné}$$

ci-dessus. Donc :

$$t^2 = \frac{6pb^2}{12\sigma} \Rightarrow t^2 = \frac{pb^2}{2\sigma} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{pb^2}{2\sigma}} \Rightarrow t = b\sqrt{\frac{p}{2\sigma}}$$

$$t = b\sqrt{\frac{p \times 0,5}{\sigma}}$$

$k_2 = 0,5$  comme prévu. Le coefficient de 1000 adaptant les kN/m<sup>2</sup> avec les N/m<sup>2</sup> :

$$t = b\sqrt{\frac{p \times k_2}{1000 \times \sigma}} \quad \text{CQFD}$$

Les calculs des flèches  $f = \frac{px^2(2lx - x^2 - l^2)}{24EI}$  ne sont

pas d'une importance déterminante en dehors de la

flèche maximum  $f = \frac{pl^4}{384EI}$ , celle-ci permet de véri-

fier que la déformation de la structure reste dans la li-

mite acceptable.

### Au sujet de $k_2$

Le panneau est considéré comme encastré en ses extrémités, c'est à dire posé sur des supports à peu près régulièrement espacés avec le « fil » du bois ou la fibre du matériau orienté perpendiculairement aux supports. Mais le panneau peut également être encastré latéralement selon les dimensions de la structure intérieure et la répartition des supports.

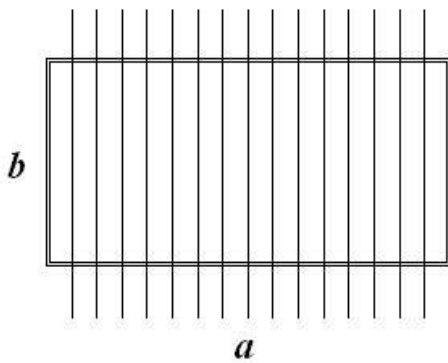


figure 1

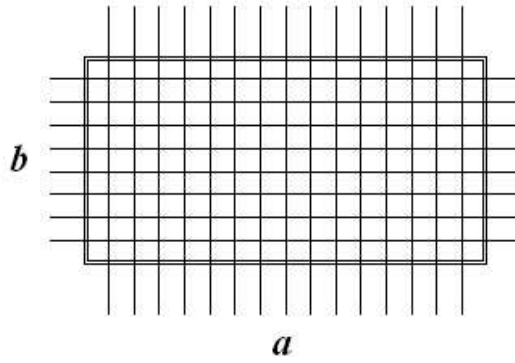


figure 2

Avec des lattes de bois massif (strip planking) on prendra la cas de la figure 1 en prenant comme portée la dimension «  $b$  » sans s'occuper des supports latéraux comme si la dimension «  $a$  » était infinie. Le calcul de l'épaisseur des lattes sera bien celui-ci :

$$t = b \sqrt{\frac{p \times k_2}{1000 \times \sigma}} \text{ avec } k_2 = 0,5 \text{ comme dit plus haut.}$$

Faut-il considérer la dimension «  $a$  » si le panneau est constitué de contreplaqué ? Oui et non.... Le contreplaqué n'est pas exactement aussi isotrope comme le



sont les panneaux métalliques. Il n'est pas aussi résistant que le bois massif dans le sens des fibres mais il permet plus de souplesse dans la conception de la structure, puisque les deux sens perpendiculaires se valent mieux que pour le bois massif qui est très faible en travers de fil. On considèrera comme un principe que la dimension « a » est également infinie, qu'elle soit orientée dans le fil ou en travers du fil apparent. On gardera  $k_2 = 0,5$  par mesure de simplification et dans le souci de garder une meilleure marge de sécurité.

Maintenant des panneaux composites en fibres orientées à 45 et 90° encastées seront bien plus isotropes.

La théorie prévoit des coefficients réducteurs pour les panneaux totalement isotropes en fonction des dimensions « b » et « a » ou  $\lambda$  et  $b$  comme dans le tableau ci-dessous extrait de la norme ISO 12215-5 :

Tableau 5 — Valeurs de  $k_2$  et  $k_3$  en fonction de l'allongement  $\lambda/b$  pour les panneaux isotropes

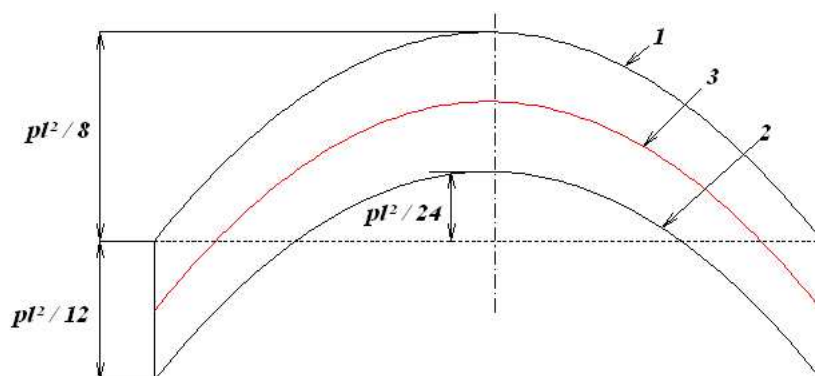
Allongement du panneau $\lambda/b$	Facteur $k_2$ $k_2$ doit être pris = 0,5 pour un bordé en bois laminé	Facteur $k_3$
> 2,0	0,500	0,028
2,0	0,497	0,028
1,9	0,493	0,027
1,8	0,487	0,027
1,7	0,479	0,026
1,6	0,468	0,025
1,5	0,454	0,024
1,4	0,436	0,023
1,3	0,412	0,021
1,2	0,383	0,019
1,1	0,349	0,016
1,0	0,308	0,014
	$k_2$ peut être évalué par la formule ci-dessous en conservant $0,308 < k_2 < 0,5$	$k_3$ peut être évalué par la formule ci-dessous en conservant $0,014 < k_3 < 0,028$
	$k_2 = \frac{0,271(\lambda/b)^2 + 0,910(\lambda/b) - 0,554}{(\lambda/b)^2 - 0,313(\lambda/b) + 1,351}$	$k_3 = \frac{0,027(\lambda/b)^2 - 0,029(\lambda/b) + 0,011}{(\lambda/b)^2 - 1,463(\lambda/b) + 1,108}$

Le facteur  $k_3$  servira pour calculer les flèches si nécessaire.

**Discussion :** les normes imposent de calculer les barrots de pont en les considérant totalement encastrés sur leurs extrémités, c'est-à-dire que le moment de flexion maximum serait à prendre en compte à l'endroit de leurs supports pour  $x=0$  ou pour  $x=l$ . Il faudrait que les murailles soient infiniment rigides pour que cette hypothèse soit respectée, ce qui ne se conçoit en aucune manière et ce n'est certes pas l'image que l'on peut s'en faire avec une structure en bois. Mais il est vrai que les barrots ne sont pas simplement « posés » sur le haut des murailles, sauf dans le cas d'une construction classique à l'ancienne.

En réalité la situation se présente sans doute selon un moyen terme entre « encastré » et « appuyé ».

Voyons la courbe des moments de flexion dans les deux cas :



La courbe n°1 est celle de la poutre non encastrée, celle du n°2 est totalement encastrée. Les deux courbes sont identiques mais décalées verticalement à

l'origine. En effet l'expression des moments peut s'écrire :  $M_{appuyé} = \frac{px(l-x)}{2}$  et  $M_{encastré} = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{12}$

La courbe n°3 serait celle d'un moyen terme avec un encastrement partiel, un « demi-encastrement » qui serait déjà plus réaliste sans pour autant être le reflet d'aucune certitude. Dans ce cas le moment maximum reviendrait au centre du barrot, ce qui semble plus en accord avec la réalité. En tous cas le fait de renforcer l'inertie du barrot sur ses appuis satisferait artificiellement la formule « encastree » sans rien apporter à la solidité de l'ensemble !

Le cas de chargement uniformément réparti est également une idée retenue par l'expérience uniquement. La pression uniforme ne peut – selon les normes – être inférieure à 0,05 bars. Prenons, par exemple, des barrots de 4 m de portée et espacés de 30 cm. La charge minimum totale serait :  $0,05 \times 400 \times 30 = 600$  daN , ce qui représente la force induite par le poids de 8 personnes de 75 kg réparties sur 4 m, donc se côtoyant sur une surface de  $50 \times 30$  cm par personne... La situation n'apparaît pas très probable s'agissant de personnes physiques.

Le calcul de la charge d'un barrot se réalise donc selon des critères forfaitaires. L'hypothèse des normes donne satisfaction dans le principe et dans la plupart des cas, que ce soit par la formule « encastree » ou par la pression minimum qui pourrait être de  $0,05 \times 12 \div 8 = 0,075$  bars pour des barrots simplement appuyés... Les problèmes ne concernent pas unique-

ment le poids des passagers mais d'autres contraintes telles que des charges de fret, des paquets de mer déferlant sur le pont ou des situations délicates lorsque l'avant du navire plonge dans les vagues et s'immerge brutalement.

Que donnent les différences d'approche entre un barrot « encastré » et appuyé pour leurs déformations ?

L'angle de la ligne élastique à l'encastrement est égal de base à zéro pour « l'encastré ». Supposons que la flèche soit la même pour un « appuyé », par exemple

$\frac{1}{100}$  de la longueur «  $l$  ». Les flèches se calculent ainsi :

$$f_{\text{encastré}} = -\frac{pl^4}{384EI} \quad \text{et} \quad f_{\text{appuyé}} = -\frac{5pl^4}{384EI} \quad \text{c'est-à-dire cinq}$$

fois plus.

La contrainte maxi est proportionnelle au moment maxi pour une inertie équivalente :

$$\sigma_{\text{encastré}} = \frac{pl^2v}{12 \times I} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{appuyé}} = \frac{pl^2v}{8 \times I}, \quad \text{c'est-à-dire 1,5 fois}$$

plus. L'angle sur l'appui est donné par la première intégration du moment de flexion puisque elle représente la dérivée de la deuxième intégration qui donne la flèche comme nous l'avons vu. Estimons la valeur de «  $p$  » pour une flèche de  $0,01 \times l$  (appuyé) :

$$0,01 \times l = -\frac{5pl^4}{384EI} \Rightarrow p = \frac{0,01 \times l \times 384EI}{5l^4}$$

finalement  $p = \frac{0,768EI}{l^3}$  ce qui permet de calculer

$$\text{l'intégrale de } \frac{px}{2}(l-x) ; \quad EIy' = \frac{plx^2}{4} - \frac{px^3}{6} - \frac{pl^3}{24}$$

$$\text{finalement } EIy' = \frac{p(6lx^2 - 4x^3 - l^3)}{24}$$

$$\text{pour } x = 0 \Rightarrow EIy' = \frac{pl^3}{24}$$

$$\text{pour } l = 1 \Rightarrow EIy' = \frac{p}{24} ; \text{ comme } p = \frac{0,768EI}{l^3}$$

cela implique que  $y' = \frac{0,768}{24} = 0,032$  (pour une flèche égale à 1 / 100...). 0,032 est la valeur de la tangente de 1,83 degrés. (Le tracé géométrique vérifie exactement ce calcul.)

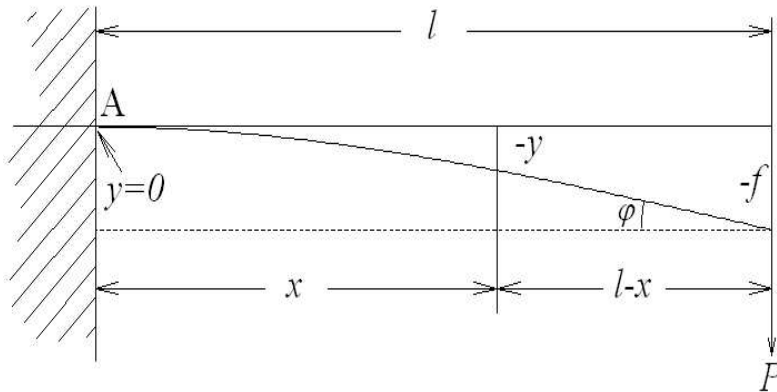
La muraille devrait fléchir pour assumer cette déformation si le barrot était entièrement encasté sinon la liaison pont / muraille ne résisterait probablement pas à un tel traitement, ce qui me fait dire que l'encastement est partiel. Ne serait-il pas plus sage de laisser vivre une certaine élasticité à l'endroit de cette liaison plutôt que de rechercher une rigidité infinie ?

On pourrait dire que ces calculs comparatifs sont inutiles puisque les normes imposent une manière de travailler. Certes, mais les normes n'imposent rien quant à la liaison mécanique entre le barrot et la muraille.

Pour conclure, une petite vérification est toujours instructive et donne une meilleure idée de la manière de résoudre des problèmes mécaniques, surtout quand la théorie ne semble pas être adaptée à la réalité.

## Quand EI varie

Reprenons l'exemple de la console ponctuelle chargée au bout de sa longueur «  $l$  ».



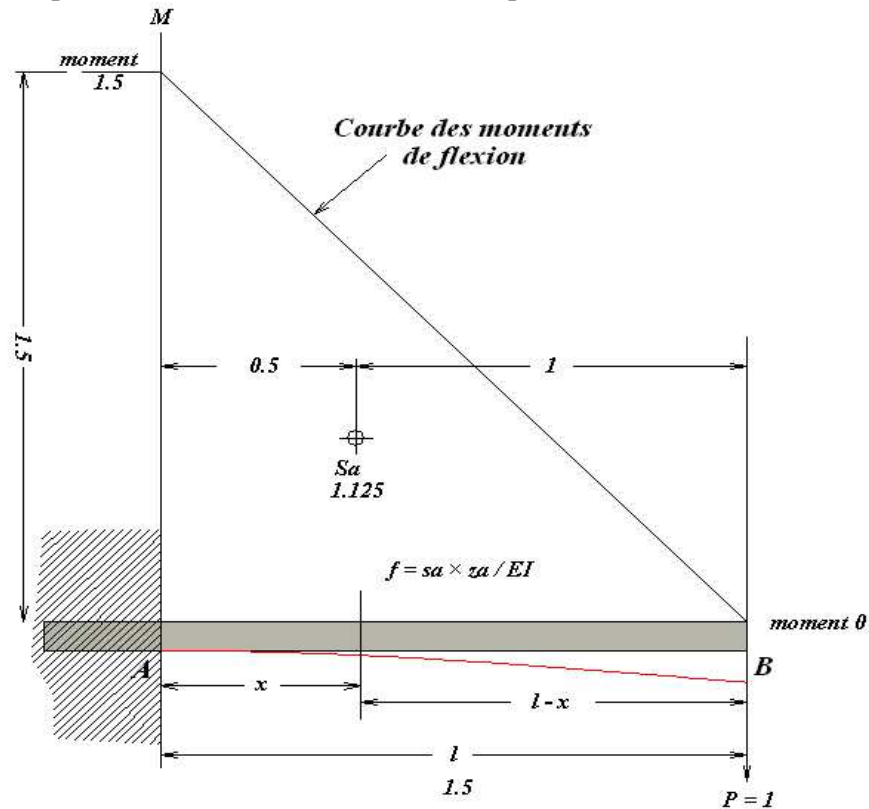
Nous avons vu que le calcul de la ligne élastique se présente de cette manière :

$$y = -\frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$$

Lorsque l'inertie «  $I$  » est fonction de  $x$ , par exemple  $I=g(x)$ , on se retrouve avec une complication supplémentaire dans la relation  $y'' = \frac{M}{EI}$  où  $M = f(x)$  et  $I = g(x) \dots$  qui nous mène sur des chemins très en dehors des buts de cet ouvrage.

La connaissance des déformations le long d'une poutre peut être importante dans certains cas. L'élasticité des bras des multicoques constitue un exemple parmi d'autres. Il peut être également instructif de voir ce que donnent des réductions de hauteur des poutres dans les extrémités comme peuvent se présenter des barrots de pont afin de gagner du poids.

Monsieur Mohr (1835-1918) a pensé une méthode graphique pour résoudre ce type de problème. L'exemple ci-dessous illustre le procédé.



Une console supporte une masse ponctuelle «  $P$  » de 1 kg à la distance «  $l$  » de 1,5 mètres. Le moment de flexion  $M=P(l-x)$  varie donc linéairement entre  $x=l$  et  $x=0$  avec un maximum pour  $x=0$ , ce qui permet de tracer la courbe des moments de flexion comme dessiné. La valeur de l'aire sous cette courbe des moments  $M(x) = P(l-x)$  sera donc mesurée sur le graphique (surface du triangle), ou donnée par l'intégrale :

$$y = P \int_0^l (l-x).dx = P \frac{(l-x)^2}{2} = 1,125 \text{ ici.}$$

Nous avons donc effectué graphiquement une première intégration du moment de flexion maximum en A.

Chaque position de  $x$  donne un coefficient de charge

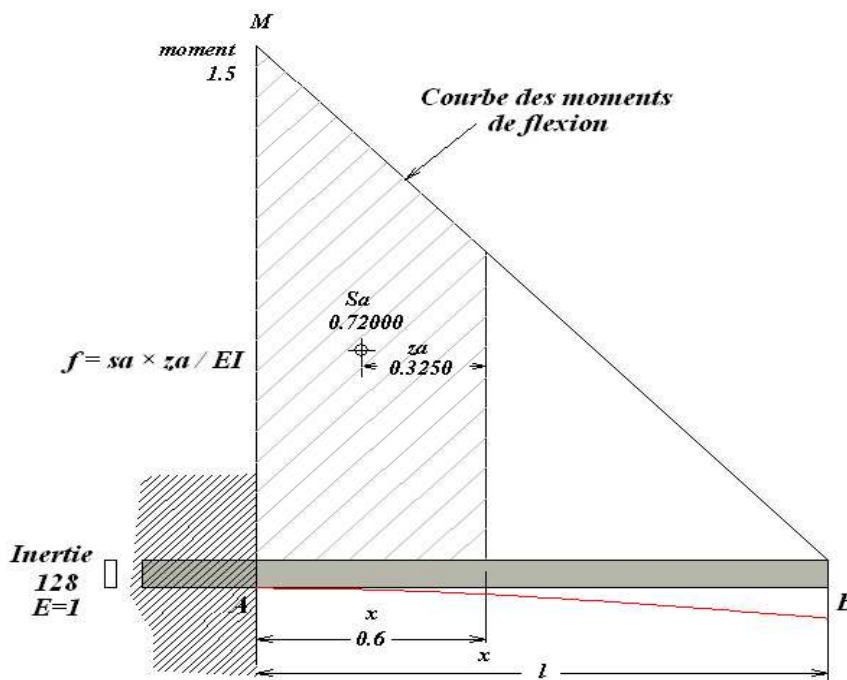
« q » = M(x). L'intégration de y=M(x) entre x=l et x=0 donne le total d'une charge fictive.

Maintenant calculons le moment total de cette charge fictive par rapport à B pour x=l. Le CG du triangle par rapport à B =  $\frac{2l}{3}$ , ce qui donne pour le moment du

triangle entier :  $P \frac{l^2}{2} \times \frac{2l}{3} \Rightarrow P \frac{l^2 l}{3} = P \frac{l^3}{3}$ , soit une deuxième intégration de la courbe des moments de flexion, ici = 1,125 pour P=1 et l=1,5.

En divisant le résultat par EI :  $y = \frac{Pl^3}{3EI}$ , on obtient la valeur de la flèche au bout de la poutre pour x=l. La formule algébrique donnait :  $f = \frac{Pl^3}{3EI}$  ce qui est exactement équivalent.

Vérifions le procédé pour une valeur de x quelconque.





$$x=0,6, Sa = 0,72,$$

CG de Sa par rapport à  $x = 0,3250$

Calcul du moment en  $x$  :

$$M = Sa \times za : 0,72 \times 0,3250 = 0,234$$

Avec  $I = 128$  et  $E = 1$ ,  $EI = 128$

$$y = -\frac{0,234}{128} = -0,001828 \quad (1)$$

Selon les formules algébriques de la RDM :

$$y = -\frac{Px^2}{6EI}(3l - x)$$

$$\text{Qui donne exactement : } -1 \times \frac{0,6^2}{6 \times 128 \times 1} = -0,00046875$$

$$-0,00046875 \times (3l - x) = -0,001828 \text{ identique à (1).}$$

Le procédé n'apporte rien à la résolution d'un problème simple comme celui-ci. En revanche la méthode permet d'évaluer les flèches des poutres à sections variables grâce à un petit artifice : il suffit de tracer la courbe des moments de flexion avec un coefficient qui tiendra compte des EI variables le long de la poutre, ou des «  $I$  » si E est constant.

On calcule le coefficient de charge de la manière suivante :

$$q(x) = \frac{I(\max)}{I(x)}$$

En réalité, on charge plus la poutre proportionnellement au rapport entre le EI maximum et le EI des sections le long de la poutre.

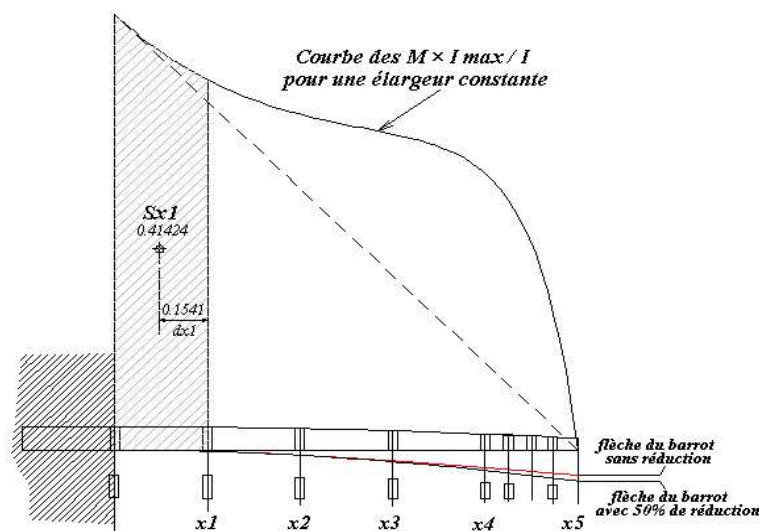
La flèche se calculera ainsi ;  $f = \frac{Sa \times za}{EI_{\max}}$

Par exemple, prenons un barrot qui aura sa hauteur aux extrémités réduite de moitié par rapport à sa hauteur centrale.

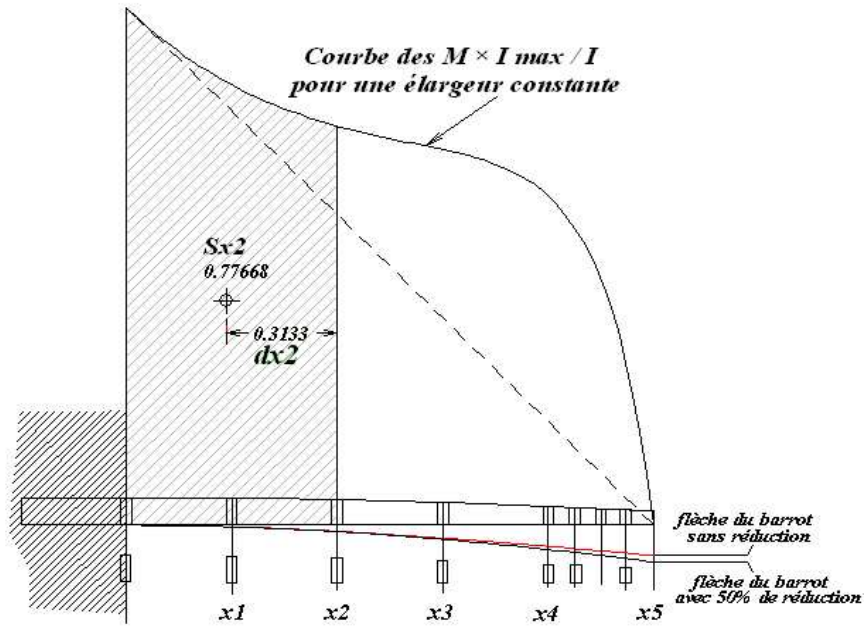
La courbe de sa géométrie peut être circulaire selon un arc passant par la hauteur  $h_0$  du centre et 50% de cette hauteur aux extrémités. Connaissant la valeur du rayon  $R$ , la hauteur  $h$  serait :

$$h(x) = h_0 - \left( R - \sqrt{R^2 - x^2} \right) \text{ et } I = \frac{bh^3}{12} \text{ si } b \text{ est constant}$$

tout le long de la poutre. Voilà ce que donnent ces considérations :

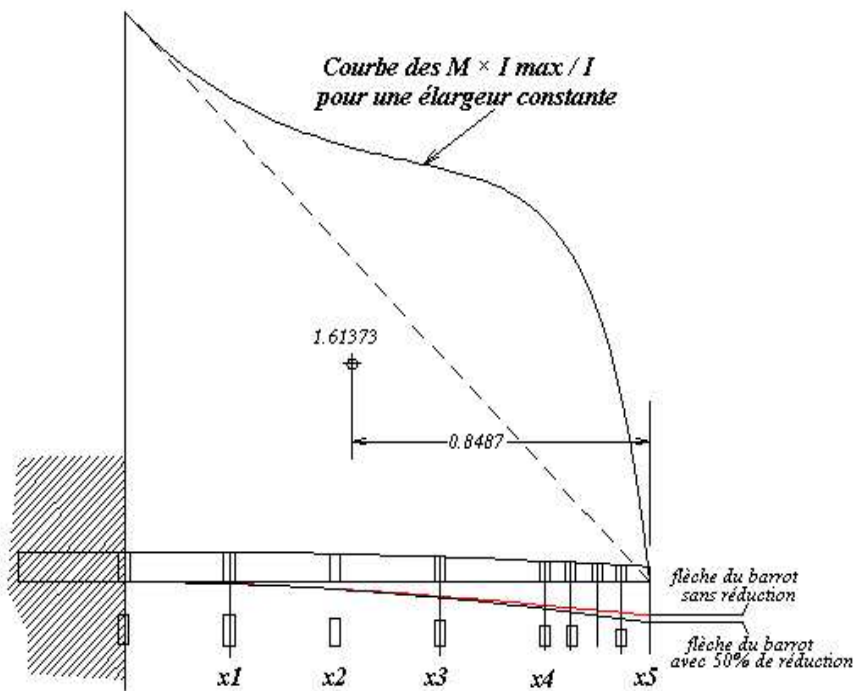


$$f_1 = \frac{0,41424 \times 0,1541}{EI_{\max}}$$



$$f_2 = \frac{0,77668 \times 0,3133}{EI_{\max}}$$

et ainsi de suite....



Pour finir avec la flèche maximum avec toute l'aire du moment de fictif flexion :

$$f_{\max} = \frac{1,61373 \times 0,8487}{EI_{\max}} = 0,0107 \text{ pour } EI = 128$$

La flèche maxi de la poutre non rétreinte était :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{1 \times 1,5^3}{3 \times 128} = 0,0088$$

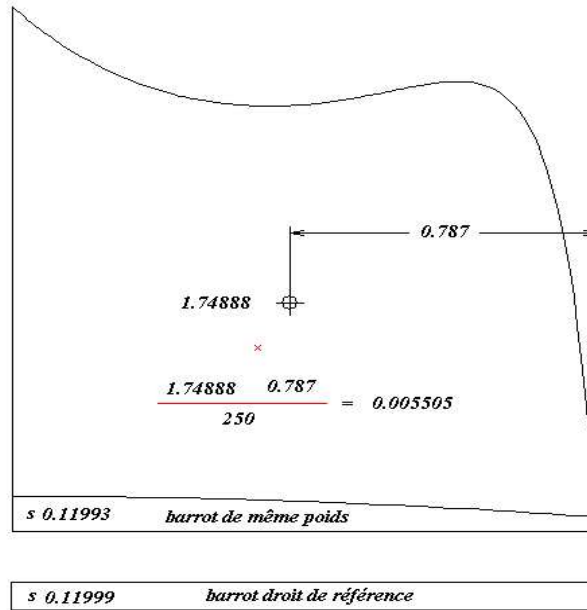
Il s'agit d'un demi barrot de pont, le barrot entier est complété par la symétrie à l'endroit de l'encastrement.

La conclusion de cette étude montre que le poids du barrot est divisé par 1,26 et que la flèche est multipliée par 1,22. autrement dit, pour un barrot de 3 mètres de long et 80 mm de hauteur au centre, une flèche de 5 mm serait augmentée de 1,1 mm alors qu'un poids de 3,024 kg sans rétreint, serait diminué de 0,624 kg.

On retrouvera facilement la raideur initiale en augmentant très légèrement la hauteur au centre.

Si on souhaite garder la flèche donnée sans les rétreints des extrémités, il faut augmenter la hauteur centrale du rapport 1,22 à la puissance 1/3, soit 85 mm au lieu de 80 mm, tout en gardant la cote aux extrémités. La résistance est augmentée, le poids gagné par rapport à un barrot sans rétreint sera divisé par 1,15 ce qui fait gagner 0,394 kg sur le même barrot de 3 mètres...

Voyons ce que donnent deux barrots de poids identique comme dessinés ci-dessous :

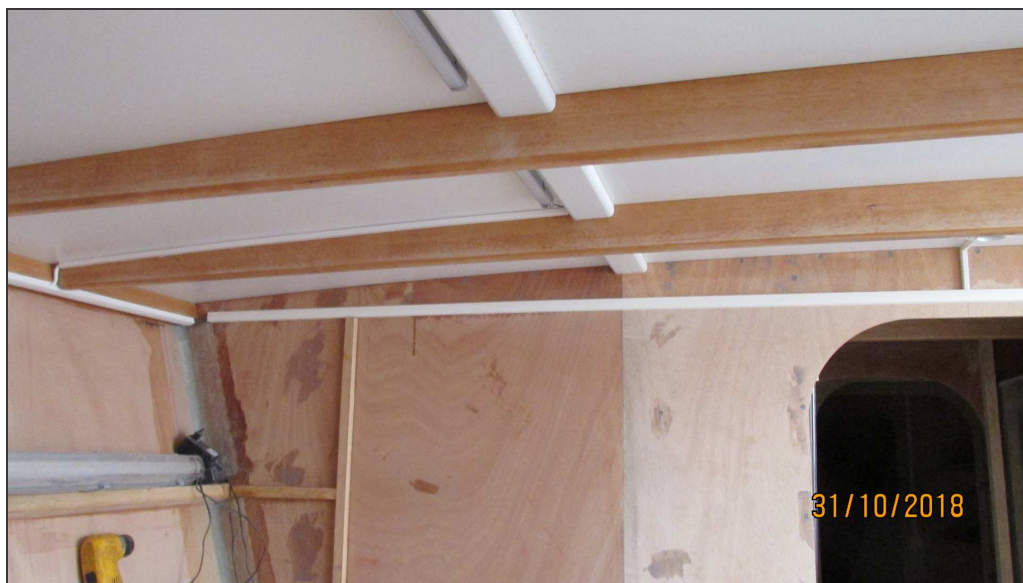


Le barrot rétreint de même poids voit sa hauteur centrale passer de 80 à 100 mm et son inertie au centre passe à 250 cm<sup>4</sup> au lieu de 128 cm<sup>4</sup>. Pour la même charge la flèche max passe de 0,0088 cm à 0,0055 cm ; la contrainte maxi au centre (maximum) passe de 4,687 à 3,000 dans les mêmes unités...

On a donc tout intérêt à prévoir des rétreints aux extrémité puisque le gain est double, pour la flèche et pour la résistance. La courbe de réduction en arc de cercle n'est pas forcément la meilleure, on essaiera d'autres formes de courbes quand le barrot sera associé à son bordé de pont, donnant un EI total, et que la charge sera répartie uniformément, par exemple....

Il était habituel de fabriquer des barrots en lamellé collé de petite lattes. J'ai abandonné cette pratique trop gourmande en heures de travail et en matériaux préférant les barrots chantournés, (directement sciés dans la masse). Le travail est plus expéditif et les rétreints

s'usinent directement à la fabrication.



Bien entendu, un barrot ne travaille pas « tout seul » comme à l'époque de la construction navale sans l'emploi des contreplaqués ni celui des adhésifs modernes.

Le calcul de la mécanique d'un barrot se mène avec la partie de bordé de pont associée. Les deux forment un ensemble comme nous le verrons au chapitre suivant, « Calcul d'un raidisseur associé en bois ». Il convient donc d'effectuer les comparaisons avec la partie du bordé de pont dont l'épaisseur reste constante de base.

La courbure naturelle du barrot, le « bouge » avec sa flèche au repos, n'est pas prise en compte ici. Les calculs concernent la flèche additionnelle  $f_1 - f_0$ , cela va dans dire.

Tout cela nous mène dans des calculs comparatifs presque sans fin pour choisir la meilleure option en

fonction de la meilleure hypothèse.... Un petit logiciel sera d'un grand secours.

### **Dans le cas des bras des trimarans**

qui travaillent en porte-à-faux, il conviendra de s'intéresser de près à la variation de « EI » le long de ces derniers. On peut chercher à définir une poutre « d'égale résistance » dans un premier temps puis de vérifier sa souplesse. L'exercice a pour but d'éviter de gaspiller de la matière qui ne servirait à rien sinon qu'à augmenter inutilement le poids du navire. Les bras seront construits en matériaux composites de fibres « exotiques », de résine et éventuellement de bois.

Prenons le cas simple d'une section en rectangle, de hauteur « h » et de largeur « b », pour dégrossir notre approche.

La contrainte maxi «  $\sigma$  » sera imposée comme constante, tout le long de la poutre.

Soit  $\sigma = \frac{Mv}{I}$  comme nous l'avons vu. « v » représente

la distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre.

$$h = 2v \Rightarrow I = \frac{b(2v)^3}{12} = \frac{b \times 8v^3}{12}$$

$$\sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{12Mv}{8bv^3} = \frac{3M}{2bv^2}$$

Dans le cas qui nous occupe,  $M = P(l-x)$

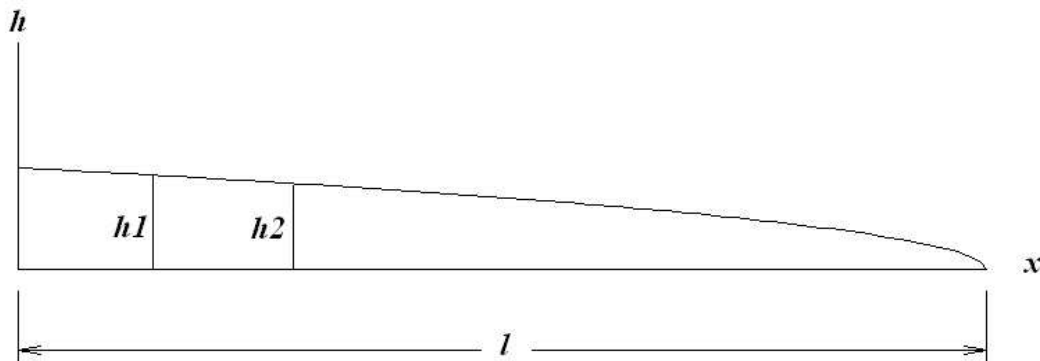
$$\sigma = \frac{3P(l-x)}{2bv^2} \Rightarrow v^2 = \frac{3P(l-x)}{2b\sigma}$$

Si nous décidons que « b » est une constante alors

$\frac{3P}{2b\sigma}$  est également une constante disons « k »

d'où  $v^2 = k(l - x)$  et  $h = 2\sqrt{k(l - x)}$

Traçons cette courbe pour voir sa géométrie avec la constante « k »=1, ce qui ne changera pas la « famille de courbe ».



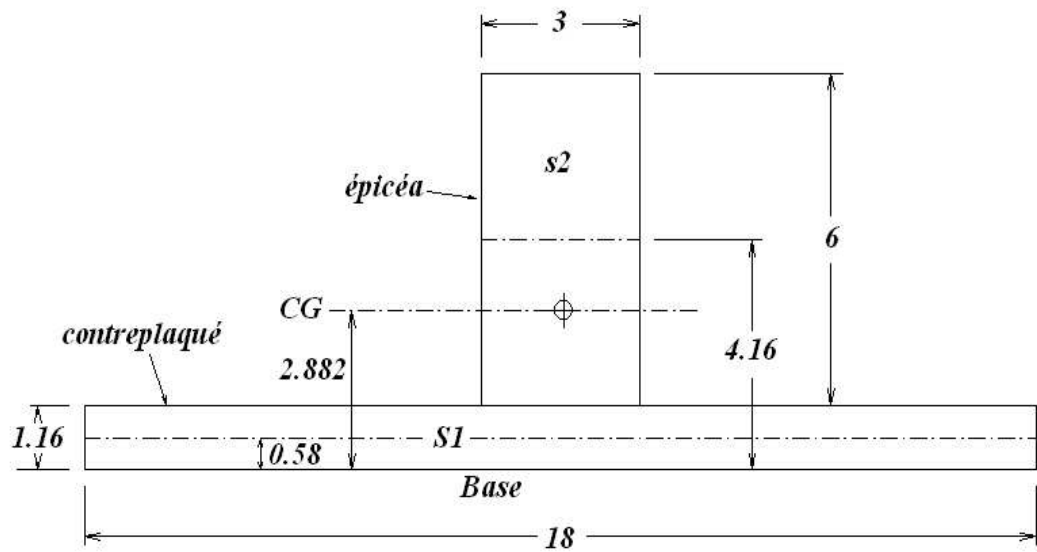
Voilà ce que donne une poutre « d'égale résistance » de section rectangulaire avec la largeur « b » constante et une diminution de hauteur en en arc de cercle.

L'étude de la souplesse sera basée sur la variation de « EI » comme précédemment. Le choix des bonnes sections économiques en poids se fera par « essais et erreurs » en calculant les EI de chaque section composée de différents matériaux.

Une autre manière de procéder consiste à dessiner une structure « a priori » et de la modifier après calculs dans le but d'économiser un maximum de matière et donc de poids. Les outils de l'informatique se montreront d'une aide extrêmement précieuse.



## Calcul d'un « raidisseur associé » en bois.



Cet exemple montre une partie de coque. Le bordé en contreplaqué est associé à une lisse en Épicéa. Les pièces sont toutes collées entre elles et forment un ensemble travaillant de concert sous la contrainte de flexion.

Prenons le cm comme unité de base et les modules d'élasticité suivant ;

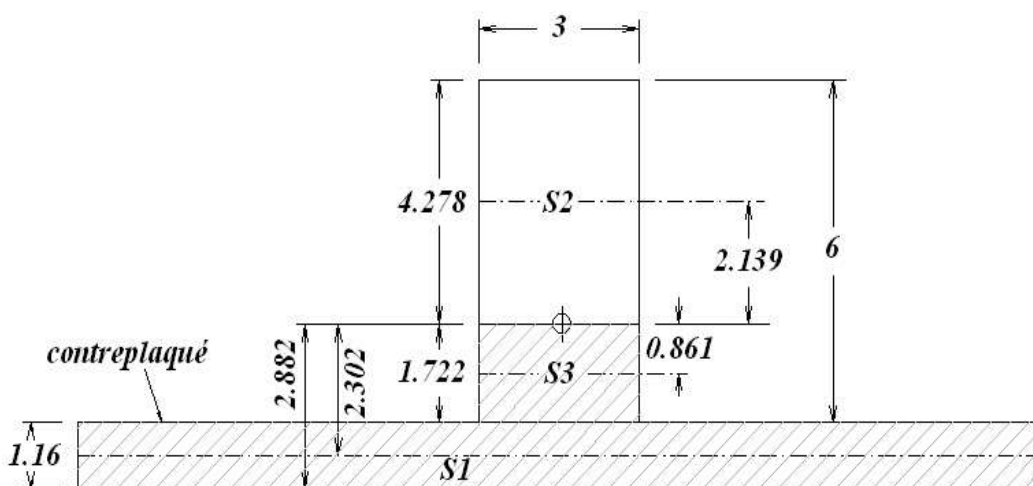
- Épicéa..... :  $E = 110000 \text{ daN/cm}^2$
- Contreplaqué Okoumé :  $E = 52620 \text{ daN/cm}^2$

**Première étape** : Calcul du CG de l'ensemble compte tenu des modules E différents.

	H	b	S	E	SE	d	SEd
S1	1,16	18	20,88	52620	1098706	0.58	637249
S2	6	3	18	110000	1980000	4.16	8236800
TOTAL					3078706		8874049

Position du « CG » :  $\frac{8874049}{3078706} = 2,882$  cm sur base

**Deuxième** étape : Changement d'axe et re-calcul à partir de la position du « CG » : l'axe de référence devient l'axe passant par le « CG » de la section.



Disons que la partie grisée travaille en traction et la partie blanche en compression.

On doit trouver  $\Sigma EI$  traction =  $\Sigma EI$  compression.

Voyons rapidement ce que donne la position de la fibre neutre ainsi définie sur le « CG » de la section :

Pour la partie en traction (dessous) :

$$- S1 = 1,16 \times 18 = 20,88 \text{ cm}^2$$

$$I_{S1/cg} = \frac{1,16^3 \times 18}{12} = 2,341 \text{ cm}^4$$

$$S1 \times d^2 = 20,88 \times 2,302^2 = 110,647 \text{ cm}^4$$

$$I_{S1/axe} = I_{S1/cg} + S1 \times d^2 = 2,341 + 110,647 = 112,988 \text{ cm}^4$$

$$EI_{S1} = 112,988 \times 52620 = 5945429 \text{ cm}^4$$

$$EI_{S3} = \frac{1,722^3 \times 3}{3} \times 110000 = 561684 \text{ cm}^4$$

$$EI_{S1+S3} = 5945429 + 561684 = 6507113 \text{ cm}^4 \quad (1)$$

Pour la partie en compression (dessus) :

$$EI_{S2} = \frac{4,278^3 \times 3}{3} \times 110000 = 8612218 \text{ cm}^4 \quad (2)$$

Il n'y a donc pas égalité, entre (1) et (2) : la fibre neutre demande à être déplacée vers le haut..

On peut rechercher cette égalité en tâtonnant sur l'emplacement de l'axe de référence mais on peut aussi utiliser la méthode déjà vue dans les chapitres précédents en cherchant le décalage « x » qui donnera l'égalité recherchée :

	H	b	S	E	SE	d	SEd	IE*
Traction (B)								
S1	1.16	18	20.88	52620	1098706	2.302	2529220	5945429
S3	1.722	3	5.166	110000	568260	0.861	489272	561684
TOTAL traction					1666966		3018492	6507113
Compression (A)								
S2	4.278	3	12.834	110000	1411740	2.139	3019712	8612218
TOTAL compression					1411740		3019712	8612218

$$*IE = (I_{cg} + Sd^2)E$$

*A = surface S2*

*B = surfaces S1 + S3*

$$a = \sum S_{(i)B} E_{(i)t} - \sum S_{(i)A} E_{(i)c} \dots\dots\dots 255226$$

$$b = 2 \times \left( \sum S_{(i)B} E_{(i)t} d_{(i)} + \sum S_{(i)A} E_{(i)c} d_{(i)} \right) \dots 12076408$$

$$c = \sum I_{(i)Baxeréf} E_{(i)t} - \sum I_{(i)Aaxeréf} E_{(i)c} \dots\dots\dots -2105067$$

(Équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ )

$$x = \frac{(\sqrt{(b^2 - 4ac)} - b)}{2a} = 0,17 \text{ cm}$$

2,882+0,17 = 3,052 cm de la base.

Cette approche donne presque l'égalité des  $EI_c = EI_t$ .

Un nouveau calcul peut être nécessaire...

La méthode est assez fastidieuse mais un petit logiciel résoudra la question en une fraction de seconde.

Afin d'éviter de faire des tests d'égalité avec des tolérances, il suffit de faire exécuter le calcul une dizaine de fois avec à chaque fois le réajustement de la position de la fibre neutre.

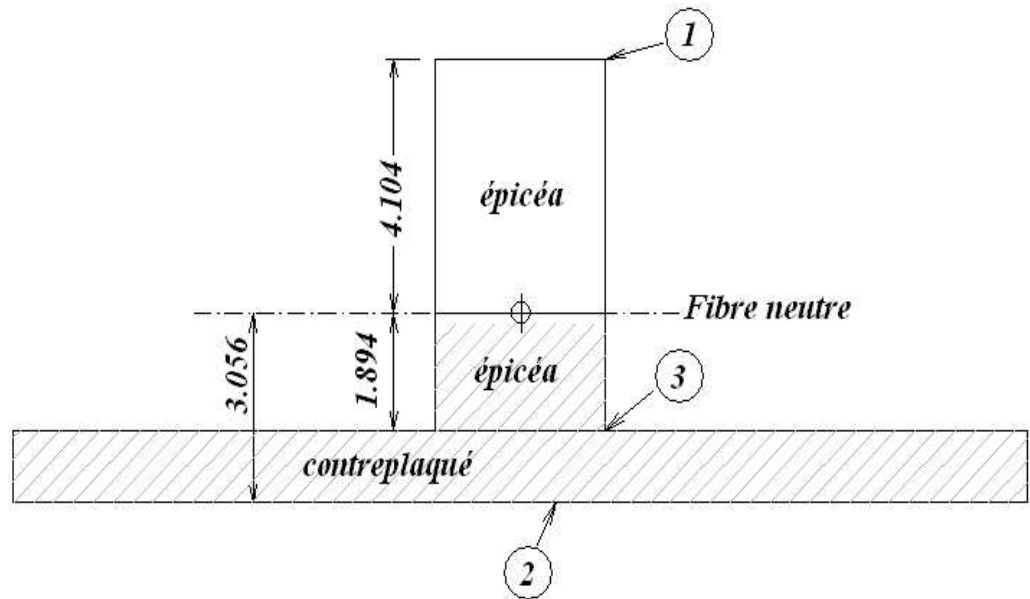
L'égalité sera ainsi automatiquement trouvée avec perfection.

Voici le résultat pour cette section :

Elément	cm		°	daN/cm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Angle	Et		
CTBX en long	1,1600	18,0000	0,00	52620	52620	0,5800	2,341344
EPICEA	6,0000	3,0000	0,00	110000	110000	4,1600	54,0000
Surface totale	38,880						
Fibre neutre	3,056						
Inertie totale	206,259752						
EI haut	7605853,66						
EI bas	7605853,66						
EI total	15211707,32						
Ef résultant	7375 N/mm <sup>2</sup>						

La fibre neutre est située à 3,056 cm de la base.

**Calculons** les contraintes et la flèche.



L'ensemble est soumis à une charge totale de 1020 daN uniformément répartie entre une portée de 104,3 cm, les extrémités sont encastées.

Moment de flexion maxi :

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{12} \text{ ou } M_{\max} = \frac{Pl}{12} \text{ pour la charge totale.}$$

$$\text{Soit } M_{\max} = \frac{1020 \times 104,3}{12} = 8865,5 \text{ daN.cm}$$

$$EI_{\text{total}} = 15211707 \text{ cm}^4$$

Au point 1 : Épicéa avec  $E = 110000 \text{ daN/cm}^2$

$$\sigma = \frac{M \times v_i \times E_i}{EI_{\text{total}}}$$

$$\sigma = \frac{8865,5 \times 4,104 \times 1100000}{15211707} = 263 \text{ daN/cm}^2$$

**soit 26,3 N/mm<sup>2</sup>**

L'Épicéa est censé résister au maxi à 60 N/mm<sup>2</sup>

Au point 2 : contreplaqué avec  $E = 52620 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma = \frac{88655 \times 3,056 \times 52620}{15211707} = 937 \text{ N/cm}^2$$

**soit 9,37 N/mm<sup>2</sup>**

Le contreplaqué CTBX est censé résister à 30 N/mm<sup>2</sup>

Au point 3 :

- Épicéa avec  $E = 110000 \text{ daN/cm}^2$

$$\sigma = \frac{8865,5 \times 1,894 \times 110000}{15211707} = 121,4 \text{ daN/cm}^2$$

**soit 12,14 N/mm<sup>2</sup>**

- Contreplaqué au même endroit avec  $E=52620 \text{ daN/cm}^2$

$$\sigma = \frac{8865,5 \times 1,894 \times 52620}{15211707} = 58,1 \text{ daN/cm}^2$$

**soit 5,81 N/mm<sup>2</sup>**

**Maintenant** le cisaillement :

Charge de cisaillement total pour le cas de charge-

ment :  $T = \frac{P}{2} = \frac{1020}{2} = 510 \text{ daN}$  sur les appuis.

$\sigma_c = \frac{T \sum m_i E_i}{EI_{total} \times b}$  au dessus ou au dessous de la fibre

considérée.

- Au collage, point 3 :  $mE$  du contreplaqué ;

$$1,16 \times 18 \times 2,476 \times 5262 = 272039 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{cis} = \frac{510 \times 272039}{15211707 \times 3} = 3,04 \text{ daN / cm}^2$$

**soit 0,304 N/mm<sup>2</sup>**

La résistance de la colle au cisaillement sera toujours supérieure à celle du bois. Il convient donc de ne considérer que la résistance du bois selon que les fibres sont disposées en long ou en travers.

- À la fibre neutre :

$$mE \text{ du contreplaqué} = 272039 \text{ cm}^3$$

$mE$  de la partie d'épicéa :

$$1,894 \times 3 \times 0,948 \times 110000 = 592519 \text{ cm}^3$$

$$\sum m_i E_i = 864558 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{cis} = \frac{510 \times 864568}{15211707 \times 3} = 9.66 \text{ daN / cm}^2$$

**soit 0,97 N/mm<sup>2</sup>**

**La flèche** maximum au milieu de la portée sera calculée à l'aide de la formule que nous avons étudiée :

$$f = -\frac{pl^4}{384EI} \text{ ou } f = -\frac{Pl^3}{384EI}$$

ce qui donne dans notre cas :

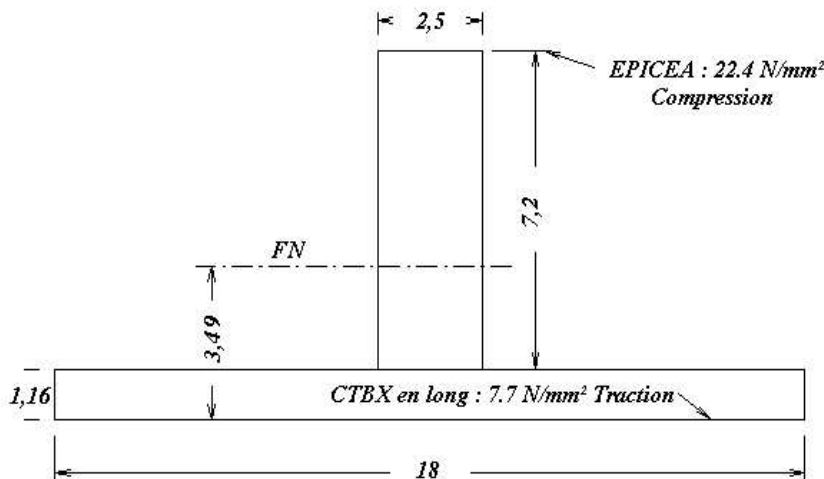
$$f = \frac{1020 \times 104,3^3}{384 \times 15211707} = 0,198 \text{ cm ou } 1,98 \text{ mm}$$

L'exemple développé ci-dessus considère que les Modules pour un même matériau sont égaux en traction ou en compression, ce qui n'est pas exactement le cas pour les composites en général. On peut en tenir compte mais cela ne changera pas radicalement les résultats.

**Au sujet de l'équilibre mécanique** d'une telle section : nos calculs indiquent que la lisse en épicéa est bien plus sollicitée que le bordé en contreplaqué :

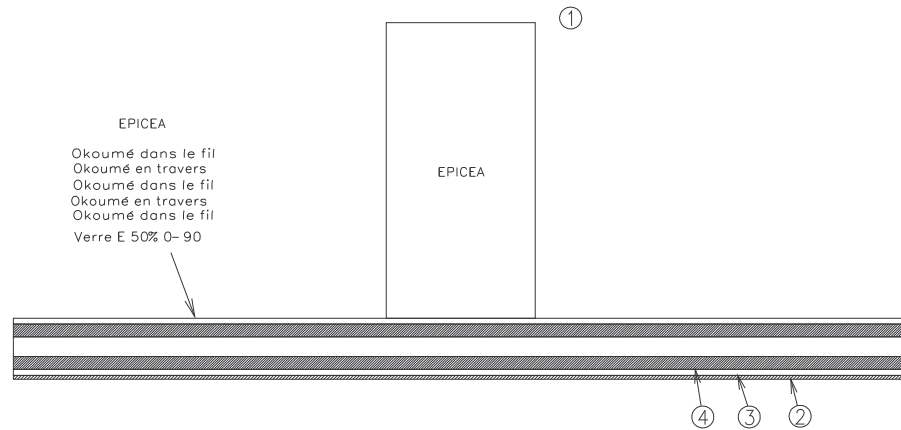
26,31 N/mm<sup>2</sup> qui laissent un coefficient de sécurité environ de 2, alors que le bordé travaille à 9,37 N/mm<sup>2</sup> avec un coefficient de sécurité de 3,2.

La lisse serait donc la première à céder en cas de malheur... On pourrait chercher à rééquilibrer les forces en augmentant la hauteur de la lisse, par exemple, toujours en préservant le poids de l'ensemble :



Avec cette configuration, la flèche est améliorée ; la contrainte sur l'épicéa est un peu moins importante, passant de 26,3 à 22,4 N/mm<sup>2</sup>. Mais le déséquilibre persiste car le contreplaqué du bordé est aussi moins sollicité. En revanche, une lisse trop haute est nettement plus difficile à installer et à maintenir en place. Elle suppose des encastremets et des encombrements plus importants et plus contraignants. On doit considérer tous les aspects de la construction et essayer de choisir le moindre mal. Tous ces paramètres à prendre en compte ne rendent pas les études très évidentes. Un peu de « feeling » sera souvent d'un grand secours. Grâce à l'informatique, il est possible d'étudier un composite dans le détail de chacun de ses plis :





Elément	mm		° Angle	N/mm <sup>2</sup>		mm CG	mm <sup>4</sup> I
	H	L		Et	Ec		
Verre E 50% 0-90	0,7710	180,0000	0,00	14000	14000	0,3855	6,874710
Okoumé dans le fil	1,2000	180,0000	0,00	9200	9200	1,3710	25,9200
Okoumé en travers	2,6000	180,0000	0,00	600	600	3,2710	264
Okoumé dans le fil	4,0000	180,0000	0,00	9200	9200	6,5710	960
Okoumé en travers	2,6000	180,0000	0,00	600	600	9,8710	264
Okoumé dans le fil	1,2000	180,0000	0,00	9200	9200	11,7710	25,9200
EPICEA	60,0000	30,0000	0,00	11000	11000	42,3710	540000

Surface totale 4026,780  
 Fibre neutre 29,859  
 Inertie totale 2098133,405797  
 EI haut 8451576866,089  
 EI bas 8451576866,089  
 EI total 16903153732,179  
 Ef résultant 8056 N/mm<sup>2</sup>

\*

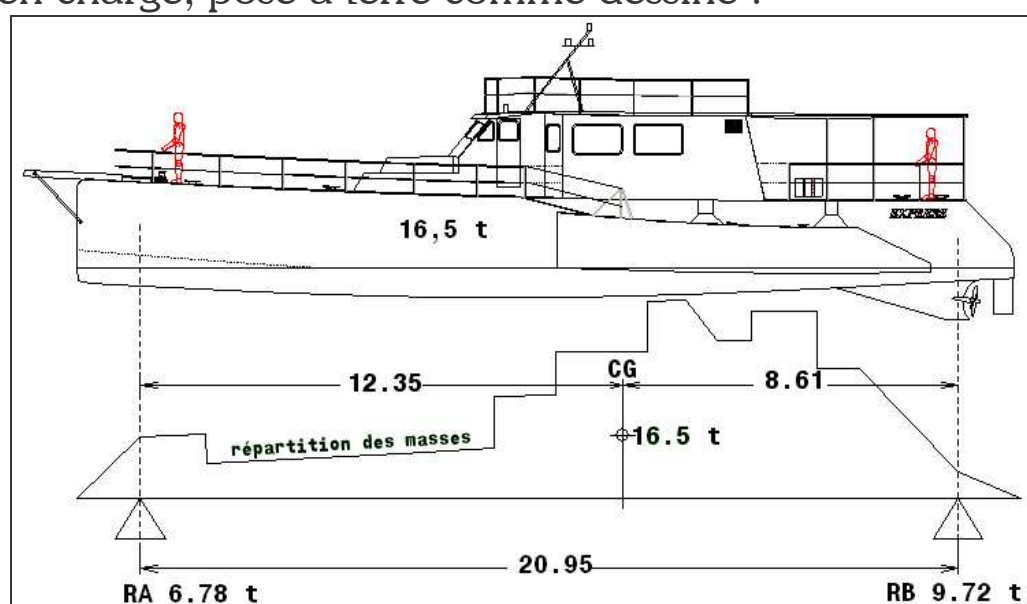
## Calcul de la « poutre navire »

On peut s'inquiéter de savoir comment réagira le navire dans différentes circonstances en mer mais également à l'échouage ou contre un quai par fort vent de travers.

L'échantillonnage peut convenir quand il s'agit d'une pression plus ou moins répartie sur de grandes surfaces mais n'oublions pas que des efforts ponctuels et très agressifs peuvent exister un jour ou l'autre. Là, je dois dire que les nombreux efforts pour réduire les poids commencent à trouver leur limite.

Jusqu'où peut on aller ? Imaginons que la coque posée à terre s'appuie sur deux points espacés un peu moins de la longueur de la flottaison pour faire simple. On calculera un moment de flexion appliqué sur cette « poutre » afin de déterminer quelles seront les contraintes à différents endroits de la structure et quelle sera la flèche maximum.

Prenons l'exemple de mon trimaran « Express » à moteur, d'une longueur de 24 m et d'un poids de 16,5 t en charge, posé à terre comme dessiné :

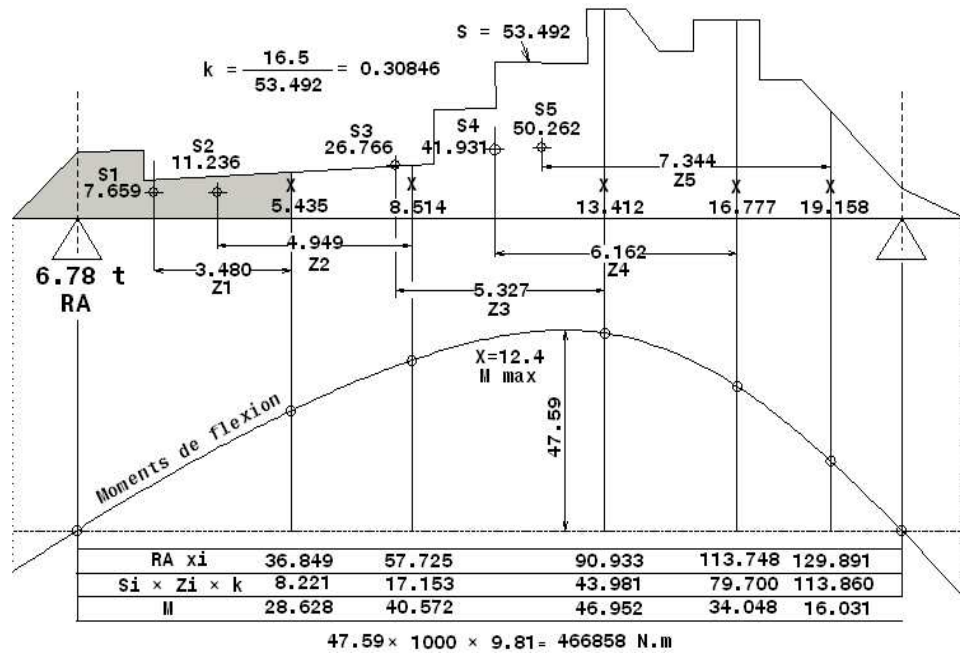


J'ai réparti les masses environ de cette manière en tenant compte du moteur et des réservoirs et en respectant la position du CG du navire selon le devis de poids. Calcul de RA et de RB :

$$RA = \frac{16,5 \times 8,61}{20,95} = 6,78 \text{ et } RB = 16,5 - 6,78 = 9,72$$

L'aire de la surface totale se monte à 53,492 m<sup>2</sup>. Le rapport avec la masse du navire sera donc de :

$$16,5 \div 53,492 = 0,30846$$



Principe de calcul des moments :

A la position  $x = 5,435 \text{ m}$ , l'aire sous la courbe des masses =  $7,659 \text{ m}^2$  avec un centre de gravité de cette aire situé comme indiqué à  $3,48 \text{ m}$  de la position  $x$ .

Moment de flexion à la position  $x$  :

$$RAx - S1 \times Z1 \times k$$

«  $k$  » est égal à  $0,30846$  pour s'adapter au déplacement réel du navire.

$$M = 6,78 \times 5,435 - 7,659 \times 3,48 \times 0,30846 = 28,628 \text{ t.m}$$

et ainsi de suite de proche en proche ou de  $x$  en  $x$ , afin de tracer la courbe des moments qui permet de déterminer un maximum à un endroit «  $x$  » précis.

On trouve donc  $47,59 \text{ t.m}$  à  $x = 12,40 \text{ m}$ .

La formule du moment maxi pour une poutre posée entre deux appuis espacés de «  $L$  » et uniformément chargée est :  $\frac{PL}{8}$  ... Nous avons dans notre cas un rap-

rapport de  $\frac{16,5 \times 20,95}{47,59} = 7,26$  pas très loin de « 8 »

mais avec un chargement plus centralisé.

47,59 t.m donnent 466 858 N.m.

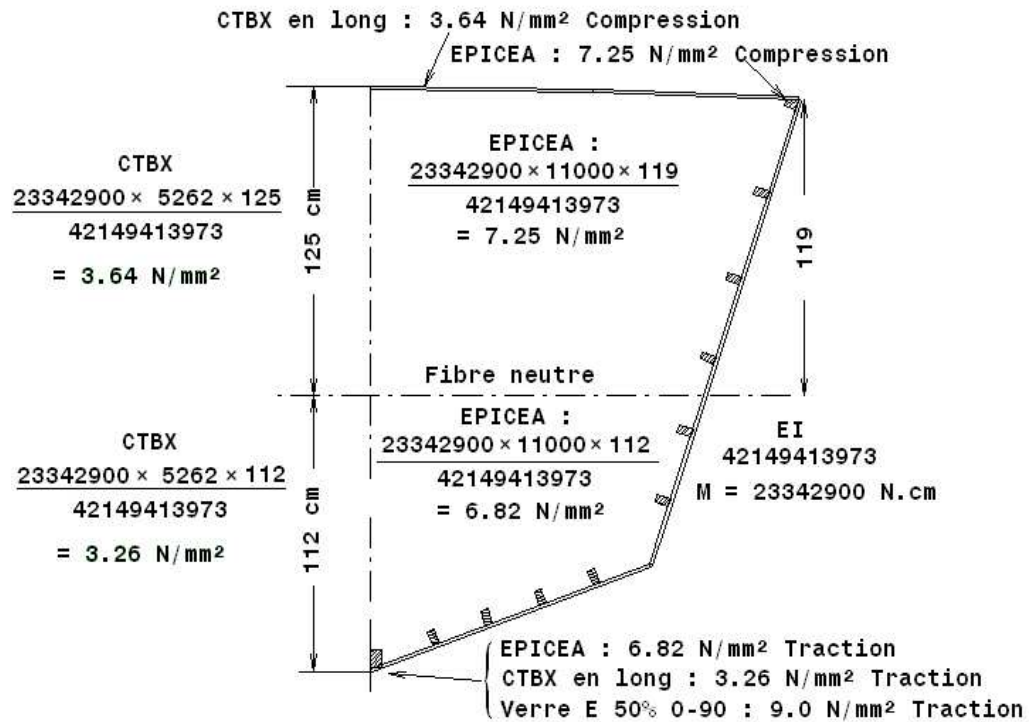
Nous ne prendrons que la moitié car le calcul du EI de la section du navire porte sur la moitié du couple, soit 233 429 N.m

Maintenant calculons le « EI » de la section du navire à la position « x »

Je n'ai pas pris en compte le roof ou la cabine sur le pont par mesure de simplification ...

Elément	cm		°	N/mm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec		
Verre E 50% 0-90	0,0771	125,1558	19,81	14000	14000	14,9631	0,004780
CTBX	1,2000	125,1547	19,76	5262	5262	15,5642	18,0223
CTBX en travers	1,2000	198,0817	71,44	4800	4800	131,0356	28,5238
CTBX	87,1885	1,2000	87,97	5262	5262	227,2570	66279
CTBX	93,6842	1,2000	89,31	5262	5262	229,3668	82224
EPICEA	7,4384	5,0000	0,00	11000	11000	-0,8037	171
EPICEA	6,0024	3,0002	19,75	11000	11000	7,6880	54,0700
EPICEA	6,0024	3,0002	19,75	11000	11000	15,8189	54,0700
EPICEA	6,0024	3,0002	19,75	11000	11000	23,9444	54,0700
EPICEA	6,0024	3,0002	19,75	11000	11000	32,0593	54,0700
EPICEA	6,0000	3,0000	71,44	11000	11000	62,9905	54,0000
EPICEA	6,0000	3,0000	71,44	11000	11000	91,3305	54,0000
EPICEA	6,0000	3,0000	71,44	11000	11000	120,6711	54,0000
EPICEA	6,0000	3,0000	71,44	11000	11000	152,6524	54,0000
EPICEA	6,0000	3,0000	71,44	11000	11000	187,5120	54,0000
EPICEA	5,0027	4,1829	71,42	11000	11000	223,1537	43,6422

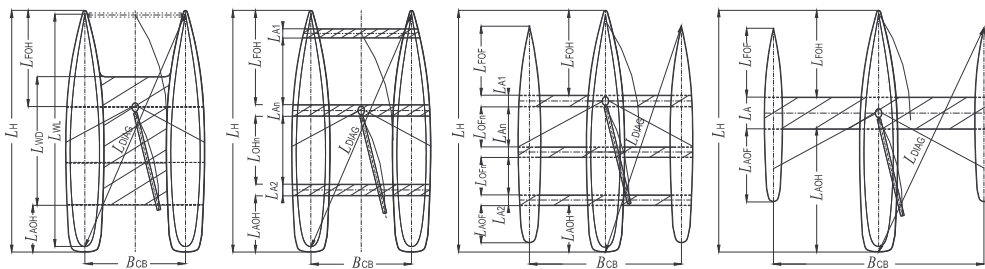
Surface totale 834,733  
 Fibre neutre 111,756  
 Inertie totale 6 198 536,573237  
 EI haut 21 074 706 986,725  
 EI bas 21 074 706 986,725  
 EI total 42 149 413 973,449  
 Ef résultant 6800 N/mm<sup>2</sup>



Limite du CTBX (contreplaqué) : 30 N/mm<sup>2</sup> , limite de l'Épicéa : 60 N/mm<sup>2</sup>. On est loin de la rupture...  
 Flèche environ 2 cm, ce qui reste insignifiant.

## Moment de torsion des multicoques.

Il s'agit de calculer quel moment minimum sera admissible lorsque deux coques seront soumises à ce moment, l'une part rapport à l'autre, lorsque le multicoque est supporté en diagonale sur deux crêtes de vague comme l'indiquent les croquis ci-dessous issus de la norme ISO 12215-7.



et selon les formules suivantes, avec :

$M_{TD}$  : moment de torsion en kN.m

$L_{WL}$  : longueur de la flottaison

$B_{CB}$  : largeur entr'axes des coques,

$k_{DYNM}$  : nombre de « g » pour ce bateau,

$m_{LDC}$  : déplacement du navire en kg,

$k_{DC}$  : coefficient selon la catégorie de navigation égale à 1 pour la catégorie « A ».

$$L_{DIAG} = \frac{L_{WL}}{\cos \alpha} = \sqrt{L_{WL}^2 + B_{CB}^2} \quad \text{and} \quad \alpha = \arctan \frac{B_{CB}}{L_{WL}} \text{ (deg)}$$

$$M_{TD} = k_{DC}^{0,5} \times \frac{M_{LDC}}{1000} \times (9,81 \times k_{DYNM}) \times 0,063 L_{DIAG}$$

NOTE 1 For catamarans, the worst wave disposition is such that the wave crest is passing through the aft of the LWL of the starboard hull and the front of the LWL of the port hull (see Figure 5), with an supported length  $L_{DIAG}$

NOTE 2 The coefficient 0,063 corresponds to a symmetrical

triangular loading on a beam simply supported ( $qL^2/12$ ) at 76% of its length. The symmetrical triangular loading corresponds to a load greater in the middle (sponsoon) than at the ends.

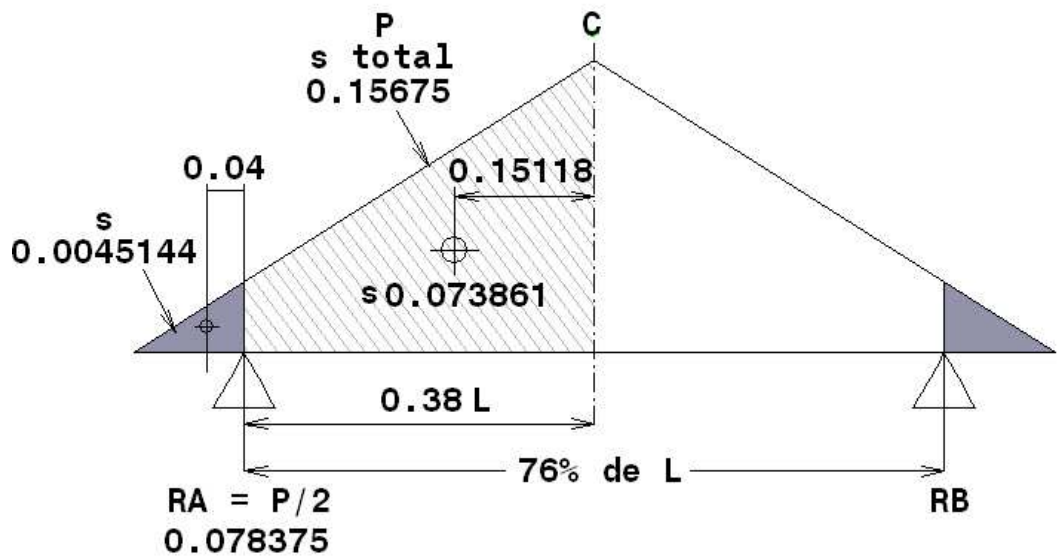
Le calcul de «  $\alpha$  » ne présente pas d'intérêt puisque les calettes donnent directement :

$$L_{\text{DIAG}} = \sqrt{L_{\text{WL}}^2 + B_{\text{CB}}^2}$$

Au sujet d'une poutre « simply supported ( $qL^2/12$ ) » :  $qL^2/12$  est le moment maxi subi par une poutre uniformément chargée ( $q$ ) et encastree en ses extremités. Doit-on concevoir que les choses se presentent de cette maniere « encastree »... ?

Une poutre « simply supported » uniformément chargée subit un moment de flexion maxi au centre égal à  $qL^2/8$  ou  $PL/8$  et pour une charge triangulaire symétrique ce sera  $PL/6$ .

La norme propose un coefficient multiplicateur = 0,063. On comprendra que la masse du navire accélérée ( $k_{\text{DYNAM}}$ ) sera supportée en deux points espacés de 76% de la longueur  $L_{\text{DIAG}}$  comme dessiné :



76% : une quote-part estimative, que nous admettons, et qui diminue le moment de flexion au centre. La charge doit être prise triangulairement et symétriquement sans autre forme de procès. En réalité le moment de flexion se calculerait ainsi selon l'exemple du dessin ci-dessus, au centre de « L » :

$$M = 0,078375 \times 0,38 - 0,073861 \times 0,15118 = 0,01861$$

duquel il faut soustraire le moment du petit triangle en porte à faux avant et après les supports :

$$M = 0,01861 - 0,0045144 \times 0,04 = 0,01843 \times L.$$

Selon cette théorie  $M = \frac{0,15675 \times L}{8,5}$  et le coefficient

0,063 serait égal à  $0,76/8,5 = 0,089$  et non pas  $0,76/12 = 0,063$  comme c'est proposé, d'où la discussion.

En déduction des ces principes, il faudrait donc considérer que le moment à prendre en compte pour le calcul du couple de torsion des coques serait environ 1,5 fois plus faible que celui calculé avec  $PL/8,5$ .

C'est une façon de voir les choses que le concepteur n'est pas obligé de respecter, le maximum n'étant pas imposé par les normes...

Une nouvelle version « de travail » avec cette mise-à-jour a été étudiée le 27/04/2018.

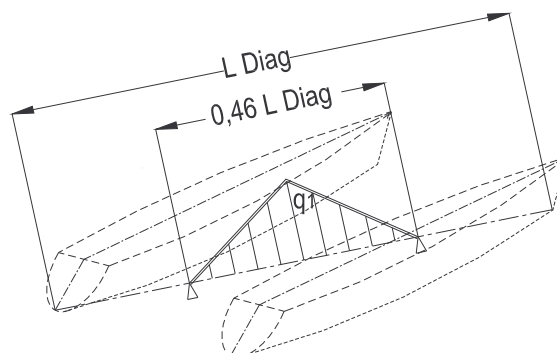
Elle propose :

$$M_{TD} = k_{DC}^{0,5} \times \frac{M_{LDC}}{1000} \times (9,81 \times k_{DYNM}) \times 0,076 L_{DIAG} \text{ (kNm) where}$$

NOTE 1 The factor 0,076 corresponds to a symmetrical triangular loading on a beam simply supported ( $q_1 L^2/12$ ) with a distance between supports of 0,46 LDIAG. The symmetrical triangular loading corresponds to a load greater in the middle (more ac-



commodation) than at the ends. see Figure 9b)



Ici, 0,063 devient 0,076 par une transformation qui m'échappe. Le coefficient du calcul du moment passe donc de 12 à 10 [ $0,76/12=0,063$  et  $0,76/10=0,076..$ ]

Maintenant d'où vient ce rapport de 0,46 L ?

Cela n'est pas clairement explicité, pas plus que 0,076, mais il s'agit d'une proposition soumise aux intéressés.

### « Essayons » de rationaliser ces choses.

Certes une poutre subit des moments de flexion en rapport avec la répartition des masses qui la composent. Certes, les deux supports en mer entre l'avant et l'arrière ne seront pas centrés sur l'étrave et le tableau arrière mais bien en retrait de ces derniers ; la portée «  $L$  » en sera donc diminuée d'autant d'une valeur estimative cohérente. Certes, l'avant et l'arrière reposent non pas sur des points précis, mais sur une vague avec une certaine répartition qui doit aussi être estimée...

Voilà bien des choses qui relèvent de l'estime et qui sont pourtant nécessaires pour commencer à effectuer un calcul, aussi approximatif et approché soit-il.

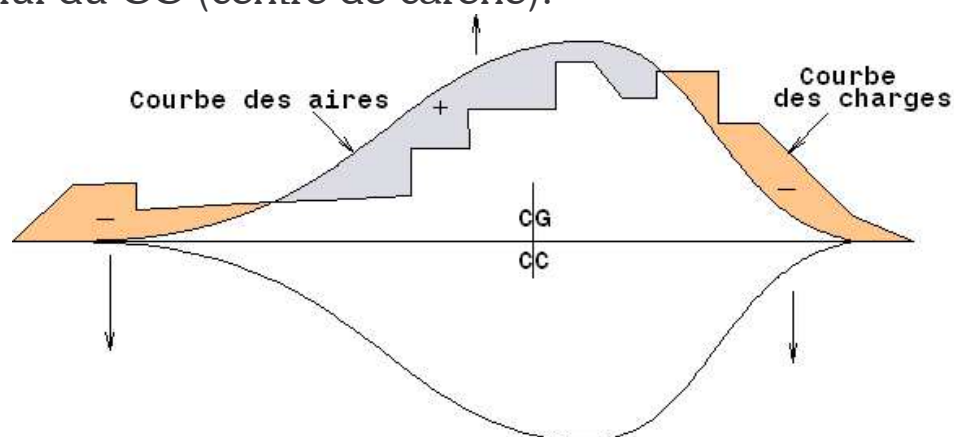
La théorie est à la fois simple et quasi impossible à appliquer. Quelle est cette « théorie » ?

La poutre-navire n'est évidemment pas chargée « triangulairement » mais d'une manière assez complexe qui demande une analyse des masses composant le navire mètre par mètre (ou cm !) de longueur de coque avec tous les poids présents à bord.

Ensuite la charge est compensée par les forces hydrostatiques se répartissant le long de la coque selon la fameuse « courbe des aires des sections immergées ». Il s'agit de la « courbe de aires » des plans de forme.

Les choses se présentent donc comme dessiné ci-dessous, en eau calme.

J'ai estimé une courbe des charges dont la surface et le CG correspondent à celle de la courbe des aires et à celui du CC (centre de carène).



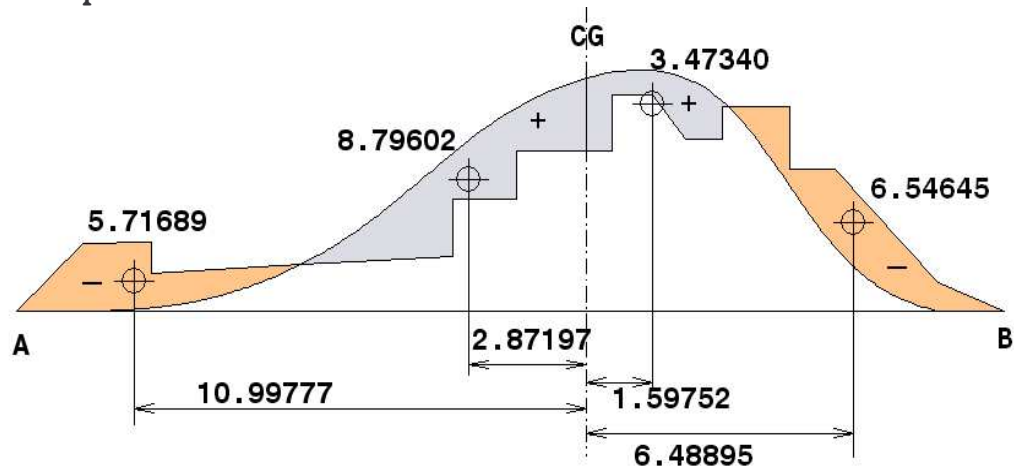
La surface de la courbe des aires doit être égale à la surface de la courbe des charges puisque le navire est équilibré. Valeur mesurée 52,90313. le Déplacement du navire = 16,5 t, le rapport d'échelle sera :

$$16,5/52,903 = 0,31189$$

La structure subit donc des forces opposées égales à la différence, mètre par mètre, des deux systèmes de forces : gravitationnelles et hydrostatiques.

Les parties en grisé sur le dessin représentent les résultantes positives et les parties en rouge les résultantes

négatives. La somme algébrique de ces surfaces devra logiquement être égale à zéro, ce qui est le cas ici. Comment calculer le moment de flexion de la coque complète en eau calme ?



Puisque la somme algébrique de toutes les surfaces colorées est égale à zéro, les réactions en A et B sont égales à zéro. On calculera donc les moments directement à partir d'une position « x » pour tracer la courbe des moments de flexion, si besoin. Prenons comme maximum et pour simplifier le moment de flexion à la position du CG général :

$$M = -5,71689 \times 10,99777 + 8,79602 \times 2,87197 = 37,61113$$

avec le rapport d'échelle :

$$M = 37,61 \times 0,31189 = 11,73 \times 9,81 = 115 \text{ kN.m}$$

Le moment calculé vers l'arrière du CG donnera le même résultat. (Équilibre des moments = CG)

Donc, en eau calme la structure serait soumise à

$$\text{un moment de flexion de } \frac{16,5t \times 24m}{11,73} = 33 \text{ en perma-}$$

nence, soit  $\frac{Pl}{33}$ , ce qui n'est pas grand-chose. Cet

exemple n'a pour but que d'expliciter le principe car on n'effectue pas ce genre de calcul pour les petits na-

vires de plaisance qui sont structurellement largement échantillonné de ce point de vue. En revanche cela peut devenir critique pour des cargos dont l'échantillonnage ramené à l'échelle d'un navire de plaisance serait égal à l'épaisseur d'un papier à cigarette, d'où l'attention particulière accordée aux calculs de répartition du chargement.

Voilà pour le principe général.

Maintenant, qu'en est-il avec des vagues pour revenir au problème de nos multicoques ?

Il faudrait dessiner des vagues "au jugé" puis installer les coques dessus en diagonale et chercher à équilibrer les volumes immergés avec le poids du navire augmenté d'un nombre de "g" également estimé....

Cette démarche est très difficile et très fastidieuse à mener rationnellement. Le résultat souffrira toujours d'une très grande approximation et ne sera donc pas aussi crédible que souhaité.

On estimera donc un « cas de figure grave » qui sera supposé répondre à ce genre de question, c'est-à-dire qu'on formulera une hypothèse selon des critères « raisonnables ».

C'est exactement la démarche proposée par les normes qui vaut ce qu'elle vaut et qui engage les discussions.

On serait tenté de décider des choses simples comme par exemple imaginer que les pointes des coques seraient ponctuellement posées sur des vagues avec une répartition uniforme des charges sur la longueur de la diagonale.

Cette hypothèse pour notre navire de 24 mètres donnerait, en supposant deux coques espacées de 10 mè-

tres entre axes :

$$L_{DIAG} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ mètres}$$

Moment de flexion max pour une charge uniforme et un CG centré :  $PL/8$  :

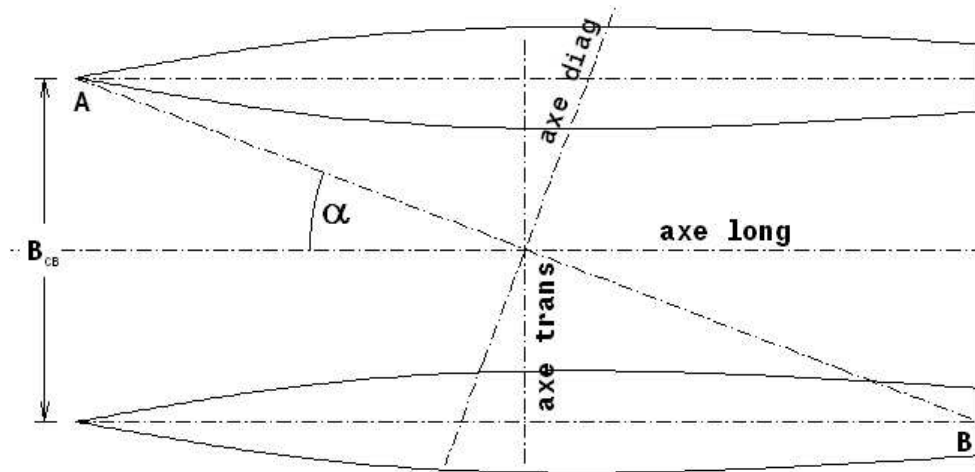
$$MT = \frac{16,5 \times 26}{8} = 53,625 \times 9,81 = 526 \text{ kN.m}$$

On peut partir sur cette base très pessimiste sans prendre de coefficient d'accélération.

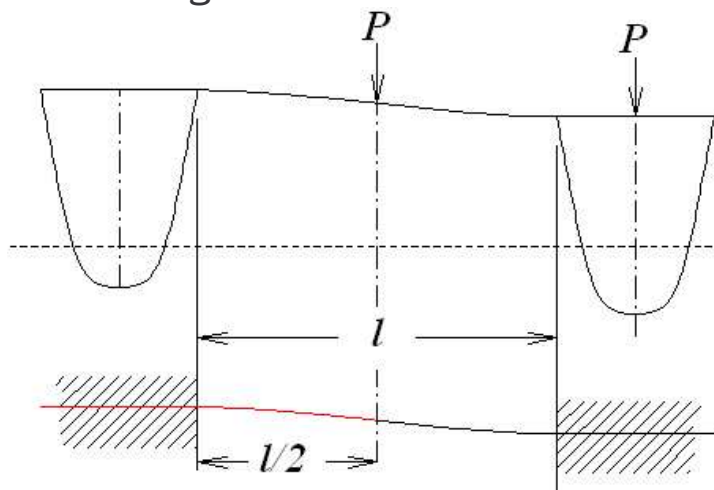
Nos petits calculs approchés ont montré que la charge n'était ni triangulaire ni rectangulaire mais quelque chose entre les deux. On appréciera donc selon ce qu'on cherche à obtenir.

Supposons que le couple de flexion  $MT$  soit arrêté sur une valeur donnée. Comment cela devient-il un couple de torsion entre les deux coques ?

Si le moment de flexion s'applique sur une poutre de longueur égale «  $L_{diag}$  » selon un angle  $\alpha$ , alors on peut estimer que ce moment devient  $MT \sin \alpha$  autour de « l'axe long » et  $MT \cos \alpha$  autour de « l'axe trans », comme axes de rotation, c'est-à-dire celui qui nous intéresse pour le calcul des poutres transversales de liaison des coques. Les normes ne tiennent pas compte de cette transformation par le cosinus de  $\alpha$ , ce qui représente encore un facteur de sécurité supplémentaire. Admettons donc que le moment de torsion des deux coques autour de « l'axe trans » soit égal au moment de flexion autour de « l'axe diag ».



Maintenant nous pouvons calculer les contraintes sur les poutres de liaison en prenant des principes simples et en admettant l'hypothèse de coques infiniment rigides en torsion. De ce fait les poutres de liaison seront considérées comme encastées sur les coques, de manière infiniment rigide.



La poutre étudiée se comportera de la façon suivante en respectant les principes admis. Nous voyons deux consoles encastées sur les coques et se rejoignant au centre par le bout libre. Une force «  $P$  » (inconnue) appliquée sur une coque se reporte au centre et est reprise par la deuxième moitié de la poutre. Le moment de flexion maxi par console sera donc :

$$M = P \frac{l}{2}$$

Nous ne connaissons pas «  $P$  » mais nous savons seulement que cette force sera proportionnelle à la flèche et à l'inverse du cube de la portée «  $l^3$  ». Dit autrement, il faudra appliquer à la poutre une force «  $P$  » pour obtenir la flèche «  $f$  ». La flèche se calcule ainsi pour une console comme nous l'avons vu précédemment :

$$f_{\text{bâbord}} = \frac{P \times \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{P \times \frac{l^3}{8}}{3EI} = \frac{Pl^3}{24EI}$$

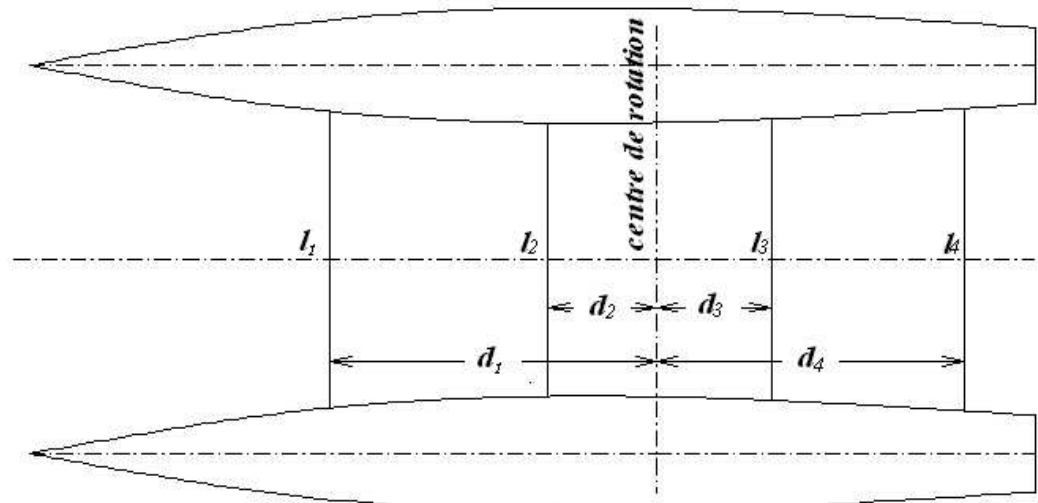
et pour les deux consoles ou toute la portée «  $l$  » :

$$f = \frac{Pl^3}{12EI} . \text{ De cette formule de principe, on tire « } P \text{ »}$$

en fonction de la flèche :  $P = \frac{12fEI}{l^3}$  ou indicé pour

$$\text{chaque bras de liaison : } P_i = \frac{12f_iEI_i}{l_i^3}$$

On pourrait déduire la flèche de chaque poutre indépendante si la position du centre de rotation était connue :



Dans ce cas la flèche de chaque poutre sera fonction de l'angle de torsion des deux coques, disons «  $\theta$  » :

$$f_i = d_i \times \tan \theta \text{ et } f_j = d_j \times \tan \theta$$

$$\text{D'où la relation : } P_i = \frac{12d_i \tan \theta EI_i}{l_i^3} \quad (1)$$

En remplaçant  $f_i$  par  $d_i \times \tan \theta$

### **Calcul des moments pour chaque poutre.**

Nous avons décidé d'un moment de torsion  $MT$  entre les coques du navire. Cela concerne un moment général qui sera repris en partie par chaque poutre de liaison. On devra donc calculer quelle sera la participation de chaque poutre en fonction de son emplacement et de sa rigidité...

Dans un premier temps on suppose que les poutres avant et arrière travaillent en opposition autour d'un axe de rotation général dont l'emplacement déterminera le calcul des moments avant et arrière de telle sorte qu'ils soient égaux en valeur absolue afin de trouver un équilibre entre l'action et la réaction.

$$M_{AV} = M_{AR} = MT / 2$$

Si nous connaissions la force «  $P$  » appliquée au centre de chaque poutre distante d'une longueur «  $d$  » du centre de rotation, alors :

$$\sum P_i \times d_i = \sum P_j \times d_j$$

«  $i$  » et «  $j$  » pour les poutres avant et arrière.

Puisque  $P_i = \frac{12d_i \tan \theta EI_i}{l_i^3}$ , les forces assumées par les

poutres (i) ou les poutres (j) seront définies en fonction de leur flèche comme indiqué ci-dessus. Donc par



rapport au centre de rotation le moment général sera :

$$M_{AV} = \sum \left( \frac{12d_i \tan \theta EI_i}{l_i^3} \times d_i \right) \text{ soit :}$$

$$M_{AV} = 12 \tan \theta \sum \frac{12d_i^2 EI_i}{l_i^3} = M_{AR} = 12 \tan \theta \sum \frac{d_j^2 EI_j}{l_j^3}$$

$$\text{d'où : } \sum \frac{d_i^2 EI_i}{l_i^3} = \sum \frac{d_j^2 EI_j}{l_j^3}$$

écrivons  $k_i = \frac{EI_i}{l_i^3}$  et  $k_j = \frac{EI_j}{l_j^3}$  ce qui donne :

$$\sum d_i^2 k_i = \sum d_j^2 k_j$$

On ne connaît pas encore la position de l'axe de rotation. À partir d'une position "x0" a priori entre les poutres, on écrit la relation suivante pour trouver un décalage "x" qui donnera l'égalité recherchée :

$$\sum k_i (d_i + x)^2 = \sum k_j (d_j - x)^2$$

Développons :

$$\sum (k_i d_i^2 + k_i x^2 + 2k_i d_i x) - \sum (k_j d_j^2 + k_j x^2 - 2k_j d_j x) = 0$$

$$x^2 (\sum k_i - \sum k_j) + 2x (\sum k_i d_i + \sum k_j d_j) + (\sum k_i d_i^2 - \sum k_j d_j^2) = 0$$

Équation du second degré de la forme  $y = ax^2 + bx + c$ .

A =  $\sum k_i - \sum k_j$  somme des « k » avec le signe

B =  $2(\sum k_i d_i + \sum k_j d_j)$  double somme des « kd », toujours positif.

C =  $\sum k_i d_i^2 - \sum k_j d_j^2$  sommes algébrique des « k » par les carrés des distances données a priori.

$$x = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A} \text{ ou synthétisé :}$$

$$x = \frac{\sqrt{4(\sum k_i d_i + \sum k_j d_j)^2 - 4(\sum k_i - \sum k_j)(\sum k_i d_i^2 - \sum k_j d_j^2)} - 2(\sum k_i d_i + \sum k_j d_j)}{2(\sum k_i - \sum k_j)}$$

La solution ainsi calculée permet de décaler l'axe de rotation  $x_0 \pm x$  de telle manière que  $M_{AV} = M_{AR}$

Connaissant maintenant la position de cet axe, il devient simple de calculer les forces  $P(i \text{ ou } j)$  et les moments assumés par chaque poutre de liaison (i) ou (j).

$$M_{AV} = \sum \frac{12d_i^2 \tan \theta EI_i}{l_i^3} \text{ permet de calculer } \tan \theta :$$

$$\tan \theta = \frac{M_{AV}}{\sum \frac{12d_i^2 EI_i}{l_i^3}}$$

dès lors :  $P_i = \frac{12d_i \tan \theta EI_i}{l_i^3}$  (1). Le moment à prendre

en compte pour le calcul d'échantillonnage de la poutre sera :  $m_i = \frac{P_i l_i}{2}$  pour chaque demi-poutre de liaison

constituée des deux consoles comme nous l'avons vu. Pour la détermination de l'échantillonnage de la poutre « i », le calcul direct de son moment de flexion sera :

$$m_i = \frac{12d_i \tan \theta EI_i}{l_i^3} \times \frac{l_i}{2} \Rightarrow m_i = \frac{6d_i \tan \theta EI_i}{l_i^2}$$

Si ce moment de flexion donne des taux de contrainte trop importants, il conviendra de revoir les  $EI$  des poutres et de refaire les calculs dans leur ensemble, jusqu'à obtenir satisfaction. On sent la nécessité de prévoir un petit logiciel ou un tableur pour aider à résoudre ce problème.

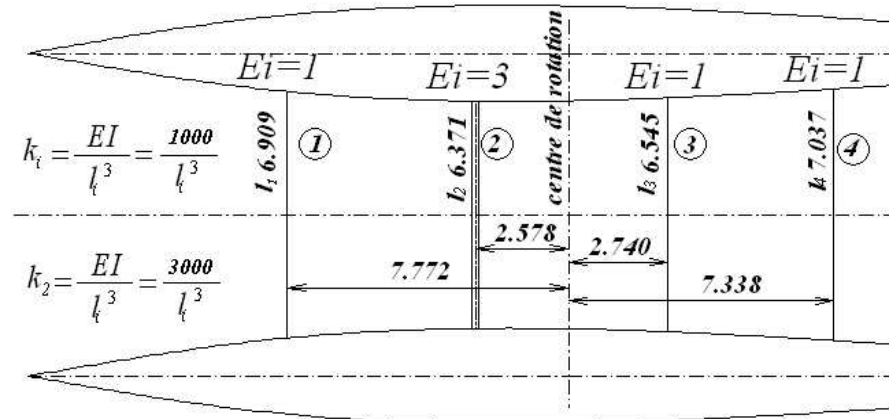
Les normes proposent un calcul tenant compte des contraintes de torsion et de cisaillement des poutres de liaison. On n'oubliera pas que toutes ces hypothèses sont très approximatives et que les résultats ne peuvent être que approximatifs.... L'essentiel sera de garantir un minimum.

Voyons un exemple simple pour illustrer le principe général.

### Exemple simplifié,

avec  $EI = 1000$  et  $k = \frac{EI}{l^3} = \frac{1000}{l^3}$  pour toutes les poutres, sauf pour la poutre n°2 plus rigide, disons avec  $EI = 3000$  et  $k = \frac{3000}{l^3}$  pour faire simple.

Le centre de rotation préalable a été placé «au jugé» :



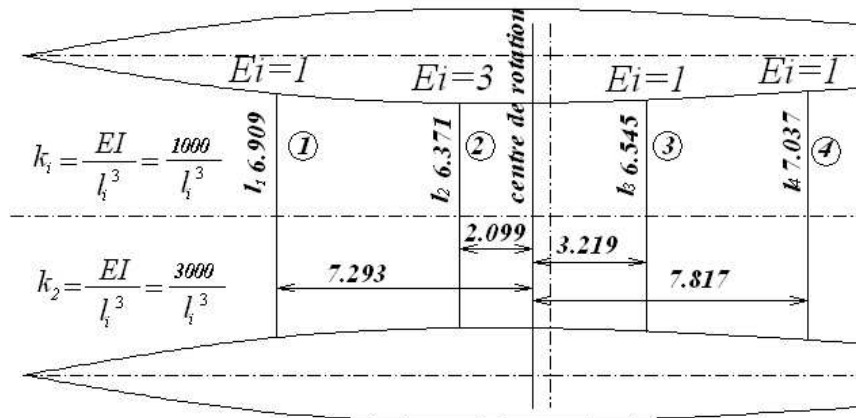
		$l^3$	$k$	$d$	$2kd$	$kd^2$
$i$	①	329.796	3.032177	7.772	47.13216	183.15557
	②	258.597	11.601063	2.578	59.81508	77.10164
$j$	③	280.368	3.566741	2.740	19.54574	26.77766
	④	348.468	2.869704	7.338	42.11578	154.52278
			8.19679		168.60876	78.95677
			$\Sigma k_i - \Sigma k_j$		$\Sigma 2kd$	$\Sigma k_i d_i^2 - \Sigma k_j d_j^2$
			A		B	C

$x = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A}$  sera le décalage qui équilibrera les

moments avant et arrière.

$$x = \frac{\sqrt{28428,914 - 2588,768 - 168,60876}}{16,39358} = -0,47946$$

Reprenons le calcul avec l'axe décalé de cette valeur :



	$l^3$	$k$	$d$	$2kd$	$kd^2$
$i$ ①	329.796	3.032177	7.293036	44.22755	161.27656
②	258.597	11.601063	2.099003	48.70133	51.11212
$j$ ③	280.368	3.566741	3.219289	22.96474	36.96507
④	348.468	2.869704	7.816878	44.86425	175.34919
		8.19679		160.75787	0.07442
		$\Sigma k_i - \Sigma k_j$		$\Sigma 2kd$	$\Sigma k_i d_i^2 - \Sigma k_j d_j^2$
		A		B	C

$$x = \frac{\sqrt{25843,093 - 2,440 - 160,758}}{16,39358} \approx 0$$

**Chiffrons un peu...**

$$MT = \frac{16,5t \times 26m}{8,5} = 50,4705 \text{ t.m}$$

$$M_{AV} = 50,4705 / 2 = 25,235 \text{ t.m}$$

avec  $EI_1 = 1000$ ,  $EI_2 = 3000$ ,  $EI_3 = 1000$ ,  $EI_4 = 1000$

$$\tan \theta = \frac{M_{AV}}{\sum \frac{12d_i^2 EI_i}{l_i^3}} = \frac{25,235}{12 \times 212,38} = 0,0099$$

Soit un angle de  $0,57^\circ \dots$

$$P_1 = \frac{12d_1 \tan \theta EI_1}{l_1^3} = 12 \times 7,293 \times 0,0099 \times 3,032 = 2,627$$

$$P_2 = \frac{12d_2 \tan \theta EI_2}{l_2^3} = 12 \times 2,099 \times 0,0099 \times 11,601 = 2,893$$

Vérification des moments avant  $M_{AV}$  :

$$P_1 \times d_1 + P_2 \times d_2 = 2,627 \times 7,293 + 2,893 \times 2,099 = 25,235$$

$$P_3 = \frac{12d_1 \tan \theta EI_3}{l_3^3} = 12 \times 3,219 \times 0,0099 \times 3,567 = 1,364$$

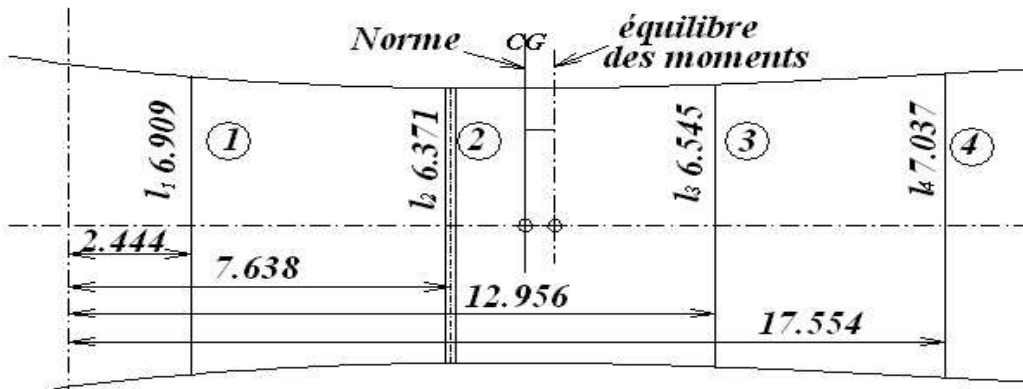
$$P_4 = \frac{12d_2 \tan \theta EI_4}{l_4^3} = 12 \times 7,817 \times 0,0099 \times 2,870 = 2,665$$

Vérification des moments arrière  $M_{AR}$  :

$$P_3 \times d_3 + P_4 \times d_4 = 1,364 \times 3,219 + 2,665 \times 7,817 = 25,223$$

Le compte est bon.

## Principe des normes ISO



	$l^3$	$k$	$d$	$kd$
①	329.796	3.03218	2.444	7.41065
②	258.597	11.60106	7.638	88.60890
③	280.368	3.56674	12.956	46.21068
④	348.468	2.86970	17.554	50.37471
		21.06968		192.60494
		$\Sigma k_i$		$\Sigma d_i k_i$

Les Normes ISO proposent ceci  $x_{CT} = \frac{\sum \frac{12E_i I_i x_i}{l_i^3}}{\sum \frac{12E_i I_i}{l_i^3}}$  pour

résoudre la question de la position du centre de rotation avec  $x_i$  mesuré à partir d'une référence au choix.

On peut supprimer la constante « 12 » et l'indice « i »

sous « E » car seul  $EI_i$  nous intéresse.  $x_{CT} = \frac{\sum \frac{EI_i x_i}{l_i^3}}{\sum \frac{EI_i}{l_i^3}}$  et

pour chaque poutre un coefficient  $k_i = \frac{EI_i}{l_i^3}$  simplifiera

les calculs. La formule devient  $x_{CT} = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}$

qui est la manière de classique de trouver un centre de gravité de masses ou de surfaces.

Reprenons notre exemple simpliste et comparons les résultats.

Le centre de rotation avec cette formule se situe à :

$$x_{CT} = \frac{192,612}{21,07} = 9,1415 \text{ m} \text{ comme le montre la figure}$$

ci-dessus. La différence sera de 0,595 mètres comparée à la méthode des moments équilibrés.

Les différences dans les calculs ne sont pas forcément si importants. Compte tenu de l'imprécision générale de ces méthodes basées sur des hypothèses très approximatives, cela n'offre probablement pas un intérêt capital de choisir une méthode plus précise..

Les coques ont été considérées comme infiniment rigide en torsion, ce qui n'est probablement pas le cas, et elles ne sont pas non plus totalement rigides en flexion ; les encastremets des poutres sur les coques ne sont probablement pas parfaits ; la raideur en torsion des poutres dépend grandement de leur géométrie, etc....

Il n'y donc pas d'intérêt à considérer les moments de torsion des poutres, ni les déformations induites par les effets de cisaillement qui restent toujours assez minimes.

Ces méthodes permettent approximativement de cal-

culer l'échantillonnage des poutres de liaison et leurs fixations sur les coques, mais les choses ne sont pas toujours aussi simplistes. On se retrouvera avec des roofs structurels, des planchers structurés et bien d'autres configurations géométriques.

On peut toujours essayer de découper le multicoque en un certain nombre de tranches et les considérer toutes comme autant de poutres indépendantes...

Et puis cela ne concerne que les multicoques à moteur. Pour les voiliers, le gréement impose des contraintes bien plus sévères à l'ensemble de la structure, contraintes à rajouter au moment de torsion  $MT$ . Le calcul des forces dans le gréement est plus rationnel, disons beaucoup moins estimatif...

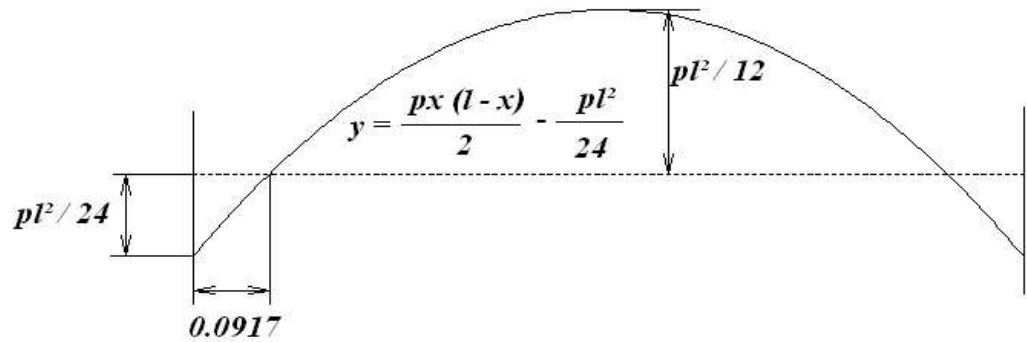
**Maintenant que nous avons les outils pour calculer le «  $EI$  » d'une section constituée de matériaux composites,**

revenons un instant sur l'exemple du « barrot associé » avec le bordé de pont lorsque  $EI$  varie.

Nous avons estimé que les barrots étaient « semi-encastés » dans notre discussion. Toutes les solutions intermédiaires sont envisageables, le chapitre « hypothèses » pourra s'augmenter de cet exemple où les approches se font uniquement par expérience.

Admettons que le cas soit « semi-encasté » ; nous avons ainsi cette courbe des moments de flexion :





avec  $y = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{24}$  et  $M \text{ maxi} = \frac{pl^2}{12}$

La charge «  $p$  » est considérée comme uniformément répartie par unité de longueur.

Le moment maxi est de même valeur que celle de la poutre entièrement encastree mais appliquée au centre du barrot et non pas sur ses encastremets.

Quelle sera la fonction de la ligne élastique ?

Calculons les racines pour  $y = 0$ , pour vérifier le tracé.

Soit  $y = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{24} = \frac{p}{24} [12(lx - x^2) - l^2]$

Pour  $l = 1$  :  $y = \frac{p}{24} [-12x^2 + 12x - 1]$

$y = 0$  lorsque  $[-12x^2 + 12x - 1] = 0$

$x_1$  et  $x_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - (4 \times -12 \times -1)}}{-24}$  ce qui donne :

$x_1 = 0,091752 \times l$  et  $x_2 = 0,908248 \times l$  .....OK

### Ligne élastique :

Intégrons une première fois :

$$EIy'' = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{24} \text{ ou } EIy'' = -\frac{px^2}{2} + \frac{pxl}{2} - \frac{pl^2}{24}$$

$$EIy' = -\frac{px^3}{6} + \frac{px^2l}{4} - \frac{pxl^2}{24} + C \dots EIy' = 0 \text{ pour } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{soit } 0 = -\frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^2 l}{4} - \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)l^2}{24} + C$$

$$0 = -\frac{p\left(\frac{l^3}{8}\right)}{6} + \frac{p\left(\frac{l^2}{4}\right)l}{4} - \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)l^2}{24} + C$$

$$0 = -\frac{pl^3}{48} + \frac{pl^3}{16} - \frac{pl^3}{48} + C \Rightarrow -\frac{2pl^3}{48} + \frac{3pl^3}{48} + C = 0$$

$$\frac{pl^3}{48} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{pl^3}{48}$$

$$EIy' = -\frac{px^3}{6} + \frac{px^2l}{4} - \frac{pxl^2}{24} - \frac{pl^3}{48}$$

Intégrons une deuxième fois pour le calcul de la flèche.

$$EIy = -\frac{px^4}{24} + \frac{px^3l}{12} - \frac{px^2l^2}{48} - \frac{pxl^3}{48} + D$$

La flèche est égale à 0 lorsque  $x = 0$  ou  $x = l$

$x = 0$  implique que  $D = 0$ , idem pour  $x = l$ , donc :

$$EIy = -\frac{2px^4}{48} + \frac{4px^3l}{48} - \frac{px^2l^2}{48} - \frac{pxl^3}{48}$$

$$EIy = \frac{px}{48}(-2x^3 + 4x^2l - xl^2 - l^3)$$

**Flèche maxi** pour  $x = \frac{l}{2}$

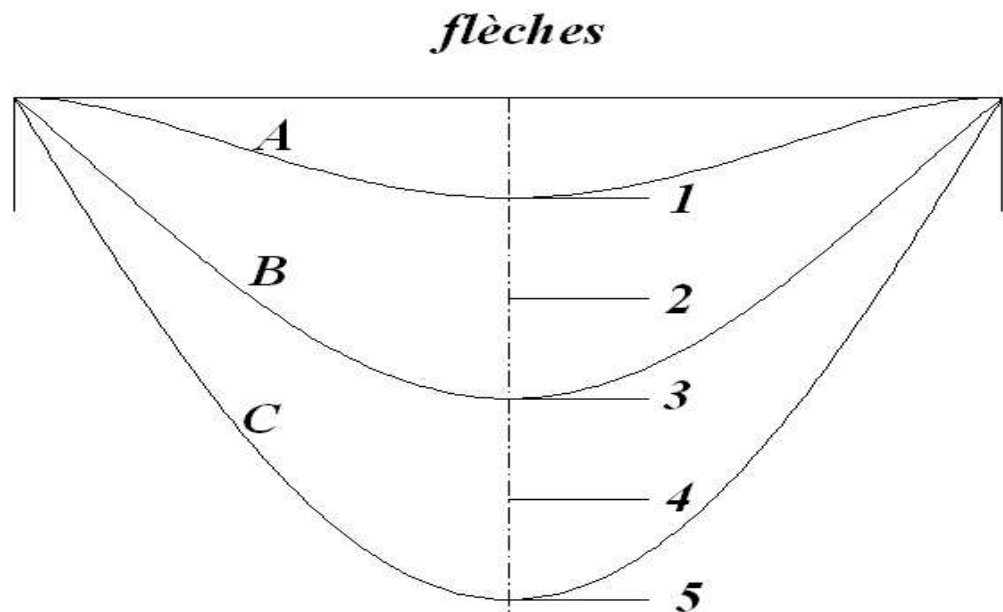
$$EIy = \frac{pl}{96} \left( -\frac{2l^3}{8} + \frac{4l^3}{4} - \frac{l^3}{2} - l^3 \right)$$

$$EIy = \frac{pl}{96} \left( -\frac{2l^3}{8} - \frac{l^3}{2} \right) = \frac{pl}{96} \left( -\frac{l^3}{4} - \frac{2l^3}{4} \right)$$

$$EIy = \frac{pl}{96} \left( -\frac{3l^3}{4} \right) = EIy = -\frac{3pl^4}{384}$$

$$flèche_{\max} = -\frac{3pl^4}{384EI}$$

Graphes des 3 cas de fixation aux extrémités :



La courbe A est celle de la poutre encastree, la courbe B est celle de la poutre semi-encastree et la courbe C est elle de la poutre simplement posée.

Prenons un exemple concret.

Un barrot possède les caractéristiques suivantes :

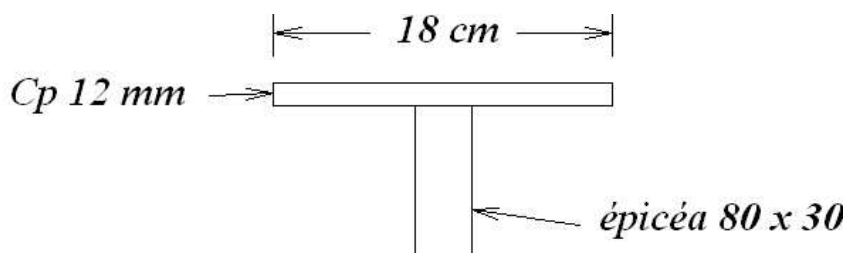
Portée 2,90 m

Espace entre les barrots : 30 cm

Il est constitué d'un massif en épicéa et d'une partie du bordé de pont en contreplaqué de 12 mm. Les normes indiquent que la partie associée du bordé de pont est à prendre au maximum sur une largeur de 15 fois l'épaisseur du bordé, soit  $15 \times 1,2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$ .

La pression minimum devrait être, toujours selon les normes de 0,05 bar pour un barrot « encastré » ou semi-encastré pour notre cas.

Section maxi a priori :



Elément	cm		Angle	N/mm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec		
EPICEA	8,0000	3,0000	0,00	11000	11000	4,0000	128
CTBX en travers	1,2000	18,0000	0,00	4800	4800	8,6000	2,592000

Surface totale 45,600  
 Fibre neutre 5,149  
 Inertie totale 419,495013  
 EI haut 1501856,269  
 EI bas 1501856,269  
 EI total 3003712,538 N/mm<sup>2</sup> ou 30037125 daN/cm<sup>2</sup>  
 Ef résultant 7160 N/mm<sup>2</sup>

La contrainte totale sur le barrot sera, pour 2,90 m de portée :

$$0,05 \text{ bar} \times 290 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 435 \text{ daN} \text{ ou}$$

$$p = 0,05 \text{ bar} \times 30 \text{ cm} = 1,5 \text{ daN par cm de longueur}$$

$$flèche_{max} = -\frac{3pl^4}{384EI} = 28 \text{ mm pour une section cons-}$$

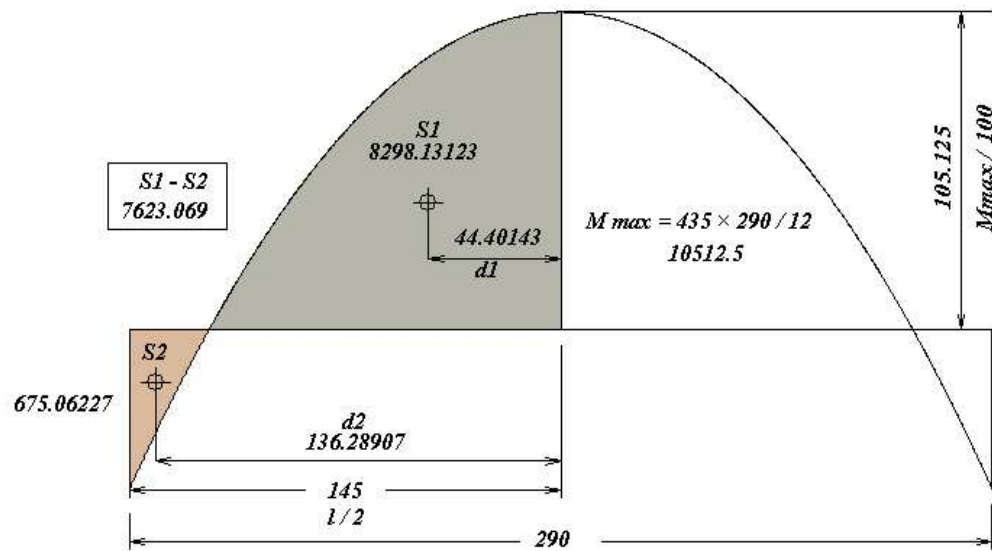
tante sur toute la longueur , soit  $2900 / 28 =$  la portée / 103.

Les contraintes :

Épicéa :  $19,8 \text{ N/mm}^2$  et  $C_p : 6,8 \text{ N/mm}^2$

Le poids total de l'ensemble :  $8,14 \text{ kg}$ .

Essayons la méthode « graphique » de Mohr avec la section constante ou  $EI$  constant pour le calcul de la flèche.



Toutes les mesures en cm,  $\text{cm}^2$  et en daN.

La courbe ici est celle des moments de flexion comme

$$\text{nous l'avons vue : } M = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{24}$$

On choisit une échelle pour les moments ici 1/100.

Puis on considère l'aire sous la courbe comme une charge fictive sur la poutre.

La surface S1 est positive, la surface S2 est négative.

La réaction fictive en A est donc égale à  $S1 - S2$ .

Le moment fictif maximum pour  $x = l / 2$  se calculera

de cette manière :

$$R_Ax - S_1 \times d_1 + S_2 \times d_2$$

$$\text{soit : } 7623 \times 145 - 8298 \times 44,4 + 675 \times 136,3 = 828899$$

$$EI \text{ en daN.cm}^2 = 30037125$$

$$\text{Flèche} = \frac{828899 \times 100}{30037125} = 2,76 \text{ cm}$$

Le calcul algébrique donne exactement :

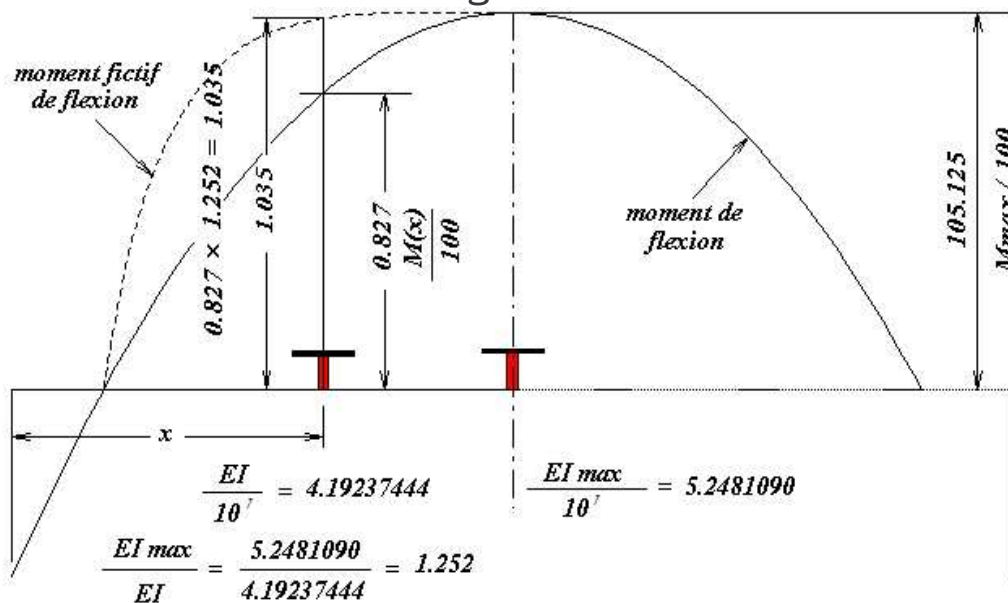
$$\text{flèche}_{\max} = \frac{3pl^4}{384EI} \text{ ou } \frac{3Pl^3}{384EI} \text{ pour la charge totale}$$

$$\frac{3 \times 435 \times 290^3}{384 \times 30037125} = 2,76 \text{ cm, ce qui corrobore le calcul}$$

précédent dont nous utiliserons le principe pour étudier les cas des *EI* variables :

Un barrot de **poids égal** mais en utilisant la possibilité d'effectuer des rétreints en ses extrémités se présente ainsi : 100 mm de hauteur au centre, 40 mm aux bouts. L'épaisseur est constante de 30 mm.

Reprenons notre approche « graphique » avec le bordé associé de 180 mm de large :



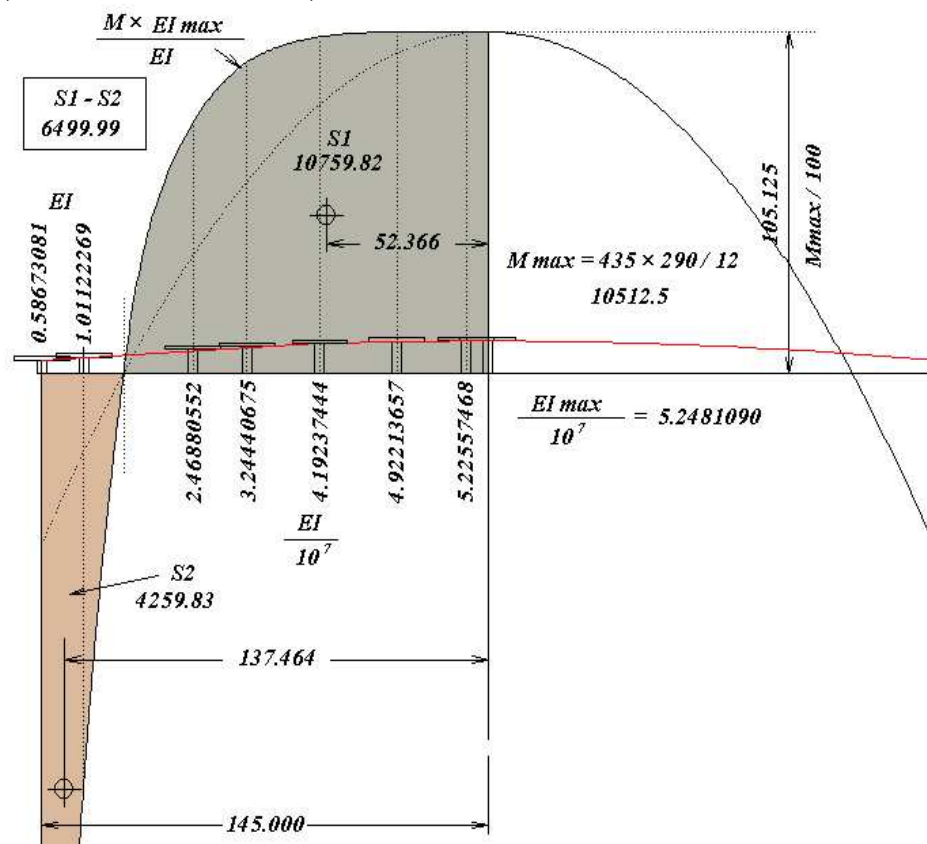
La courbe des moments de flexion doit être rectifiée selon le rapport  $k(x) = \frac{EI_{\max}}{EI(x)}$

A partir de là, l'aire située sous la courbe des  $M \times k$  sera prise comme charge répartie sur la poutre de référence.

A la position « x », on calcule le EI de la section, puis le coefficient  $k(x) = \frac{EI_{\max}}{EI(x)}$  (1,252 dans l'exemple ci-

dessus) et on applique ce coefficient au moment de flexion à la position « x » de proche en proche autant de fois que nécessaire afin d'obtenir une courbe correcte. Puis on calcule la valeur de ou des surfaces délimitées sous la courbe fictive.

A partir de là, on commence par évaluer le RA fictif : Ici ; S1-S2 = 6499,99.



Puis on évalue l'expression du moment fictif pour  $x = l/2$  : ( $l = 290 \text{ cm}$ )

$$RA \times \frac{l}{2} - S1 \times d1 + S2 \times d2 \text{ soit :}$$

$$6499.99 \times 145 - 10759 \times 52,36 + 4259 \times 137,46 = 964623$$

Flèche = Moment fictif /  $EI_{\max}$ , en prenant en compte le rapport d'échelle sur notre croquis (1/100) :

$$\text{Flèche} = \frac{964623 \times 100}{EI_{\max}} = \frac{964623 \times 100}{52481090} = 1,84 \text{ cm}$$

au lieu de 2,76 cm avec le barrot non rétreint d'un poids identique.

Dans le cas d'un « semi-encastrement » aux extrémités, ce barrot associé, **à poids égal**, est donc plus solide et plus rigide que sa version non rétreinte. Intuitivement cela tombait sous le sens mais une petite vérification conforte le sentiment.



## La flèche ou la contrainte ?

En ce qui concerne la contrainte, le calcul ne souffre pas de doute. La contrainte doit se situer en deçà d'une certaine limite considérant les coefficients de sécurité.

Mais qu'en est-il de la flèche ? On peut décider *a priori* que la flèche ne devrait pas excéder un pourcentage de la portée «  $l$  ». C'est en effet ce qui peut être imposé dans certain cas, par exemple pas de flèche supérieure à la portée divisée par un chiffre empirique, 100, 200, 400, 1000 ou autrement :  $0,01 \times l$  ou  $0,02 \times l$  .... En effet un panneau assez peu épais peut très bien convenir pour les contraintes mais afficher une déformation excessive.

Selon l' ABS (American Bureau of Shipping), les choses doivent être calculées ainsi pour tenir compte des déformations :

$$I = \frac{C \times h \times s \times l^3}{E} \text{ exprimé en cm}^4$$

Avec :

C : coefficients, 26041 pour des poutres « encastrées » et 57290 pour des poutres plus ou moins « posées »

h : hauteur de la colonne d'eau, laquelle donne la pression : 1 m = 0,1 bar ; 10 m = 1 bar ou 100 kPa

s : la largeur de l'élément ou les espacements entre les raidisseurs, en mètre.

l : la portée également en mètre.

E module d'élasticité en kgf/mm<sup>2</sup>.

L'ensemble est l'association du bordé et du raidisseur.

On peut discuter sur cette approche qui semble assez empirique surtout si les modules d'élasticité sont très différents entre les divers constituants de l'ensemble. Dans ce cas, la valeur de l'inertie ne correspond pas à une donnée directement exploitable comme le suggère cette formule qui date certainement, telle qu'elle est écrite ici.

Cherchons tout de même à comprendre ce que cela signifie.

La flèche pour une poutre encastree et uniformément

chargés se calcule ainsi :  $f = \frac{pl^4}{384EI}$ .

Supposons que la flèche doive être égale à  $l / 100$

$$0,01l = \frac{pl^4}{384EI} \Rightarrow 0,01 = \frac{pl^3}{384EI} \Rightarrow \frac{pl^3}{3,84EI} = 1$$

$$\frac{1}{3,84} = 0,26041 \Rightarrow 26041 = 0,26041 \times 10^5 \quad (1)$$

Reprenons la formule de l'ABS :

$$I = \frac{26041 \times h \times s \times l^3}{E} \quad \text{ce qui correspond au cas de}$$

chargement. Adaptons les unités de mesure en cm, et en bar.

$$I = \frac{C \times h \cdot 10^{-1} \times s \cdot 10^2 \times (l \cdot 10^2)^3}{E \cdot 10^2} =$$

$$I = \frac{C \times h \cdot 10^{-1} \times s \times l^3 \cdot 10^6}{E} \Rightarrow I = \frac{C \times h \times s \times l^3 \cdot 10^5}{E} \quad (1)$$

Le compte est bon, comme on s'en doutait. La flèche maxi doit bien être  $\leq$  à  $0,01$  fois la portée.

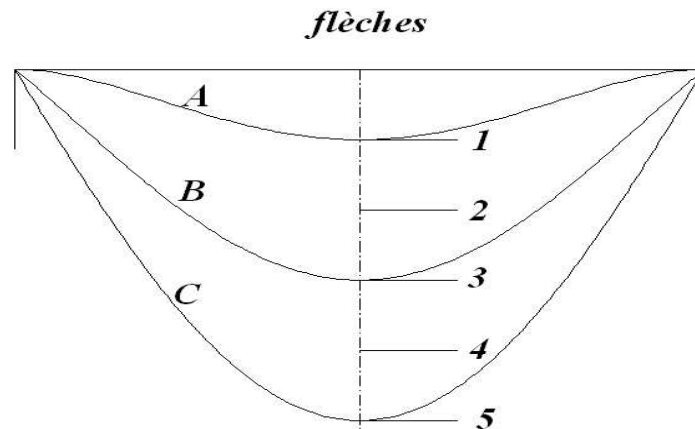
Il aurait été bien plus simple d'enoncer les choses de cette manière ; flèche maxi =  $l / 100$  !

Et qu'en est-il du coefficient  $C = 57290$  ? Il est précisé d'utiliser ce chiffre pour le calcul de «  $I$  » au centre des varangues. Je dois dire que l'approche est assez vague car les déformations à cet endroit dépendent de trop de facteurs géométriques.

Le simple rapport  $\frac{57290}{26041} = 2,2$  implique que l'inertie

doit être 2,2 fois plus importante que celle qui est nécessaire à une poutre encastree pour le calcul du dimensionnement du centre des varangues.

Une poutre de mêmes dimensions simplement posée présente une flèche 5 fois plus importante que si elle était encastree. Nous avons étudié les flèches selon les cas d'encastrement ;



La courbe A est celle de la poutre encastree, la courbe B est celle de la poutre semi-encastree et la courbe C est elle de la poutre simplement posée.

Le choix de l'ABS du coef = 2,2 est-il purement expérimental ?

On peut reprocher aux normes de présenter les choses de manière totalement aveugle par rapport aux formules classiques de la RDM. Donner une recette pour obtenir un moment d'inertie d'une section est assez abs-

cons.... La démarche inverse consistant à dessiner une section « a priori » et s'en servir pour calculer les « EI » servant à déduire les contraintes maxi pli par pli puis la flèche maxi avec la raideur totale semble plus évidente et plus en accord avec l'entendement de la théorie.

Les normes ISO procèdent de manière un peu différente comme je l'ai montré. Elles partent du principe que l'utilisateur doit obtenir directement l'échantillonnage, c'est-à-dire les épaisseurs et non pas un moment d'inertie général. Quoi qu'il en soit, une analyse correcte impose de calculer les éléments des composites pli par pli.

Pour le calcul des « raidisseurs associés », les normes ISO proposent des formules qui donnent un module

de résistance  $\frac{I}{v}$  ou « SM : section modulus SM » en

anglais. Cette approche ne correspond plus aux exigences de calcul des matériaux composés de modules d'élasticité très différents et de section largement disymétrique. Les normes proposent mais n'imposent pas une méthode particulière si elle se justifie.

En ce qui concerne les matériaux monolithiques, les normes imposent une épaisseur minimale pour le bordé.

Voilà la formule définie pour le contreplaqué :

$$t_{MIN} = k_5 \times (A + k_7 + V + k_8 + m_{LDC}^{0,33}) \text{ (mm)}$$

		A	k <sub>5</sub>	k <sub>7</sub>	k <sub>8</sub>
Contreplaqué	Fonds	3,0	$\sqrt{30 / \sigma_{uf}}$	0,05	0,3
	Muraille / tableau AR	3,0		0	0,3

$V$  = vitesse (nœuds) maximale en pleine charge «  $m_{LDC}$  » .

Exemple du trimaran « Express » de 24 m et déplaçant 16,5 tonnes en pleine charge et capable de marcher à 24 nœuds : le bordé de fond constitué d'un contreplaqué devrait avoir une épaisseur minimale de 11,59 mm sans stratification...

\*

## Les composites de fibres et de résine

Permettent de fabriquer un matériau à la demande en utilisant des fibres (verre, carbone, aramide, lin....) liées à l'aide d'une résine (polyester, époxy, vinylester...).

Le choix des composants dépendra du but recherché. Le problème sera de connaître les caractéristiques mécaniques et les épaisseurs afin de pouvoir effectuer des calculs de résistance et de flexibilité.

Les catalogues donnent des caractéristiques en fonction des fibres avec leur orientation et en fonction des résines. En général on trouve ces caractéristiques sous forme de tableau avec le pourcentage pondéral ou volumique de fibre par rapport au total fibre + résine.

$\psi$ Taux en masse	$\phi$ Taux en volume	Mélange Mat / Roving/ Multiaxial						Mat projeté		UD (Unidirectionnel)			
		$\sigma_{ut}$	$\sigma_{uc}$	$\sigma_{uf}$	$\tau_u$	E	G	$\sigma_{ut}$	$\sigma_{uc}$	$\sigma_{ut} //$	$\sigma_{uc} //$	$\tau_u$	E
		N/mm <sup>2</sup>											
0,250	0,135	67	110	138	58	4 500	2 665	63	126				
0,275	0,151	76	113	145	60	5 450	2 708	66	130				
0,300	0,167	85	117	152	62	6 400	2 750	70	134				
0,325	0,184	96	121	160	64	7 350	2 793	74	139				
0,350	0,202	107	125	168	66	8 300	2 835	78	144	297	278	50	15 479
0,375	0,220	120	128	178	68	9 250	2 878			316	284	50	16 503
0,400	0,238	133	132	187	70	10 200	2 920			337	290	50	17 586
0,425	0,257	148	136	198	72	11 150	2 963			358	296	50	18 727
0,450	0,277	163	140	209	74	12 100	3 005			381	303	50	19 927
0,475	0,298	180	143	220	76	13 050	3 048			405	309	50	21 184
0,500	0,319	197	147	233	78	14 000	3 090			430	315	50	22 500

La connaissance des densités des différents composants nous permettra de calculer les épaisseurs résultantes des matériaux combinés ensemble.

Les fibres sont en principe proposées selon leur grammage au  $m^2$ .

Énoncé du problème :

$F$  : poids de la fibre au  $m^2$

$R$  : poids de la résine au  $m^2$

$T$  : Total  $F + R$

$\psi$  :  $F/T$  donné dans les tableaux (taux en masse).

Calcul de l'épaisseur :

Prenons par exemple :

densité de la fibre de verre = 2,56

densité de la résine polyester = 1,2

Ce qui signifie que 0,5  $kg/m^2$ , par exemple, de résine aura une épaisseur égale à  $0,5 \text{ kg} / 1,2 = 0,417 \text{ mm}$ .

0,6  $kg/m^2$  de verre, s'il était massif, aurait une épaisseur de  $0,6 \text{ kg} / 2,56 = 0,234 \text{ mm}$ .

L'ensemble résine + fibre de verre aura donc une épaisseur totale de :

$0,417 + 0,234 = 0,651 \text{ mm}$ .

Le verre ne se présente pas sous forme massive mais l'air compris entre les fibres est comblé par la résine, ce qui revient au même.

À partir du taux de fibres en masse  $\psi$ , on peut écrire :

$$\psi = \frac{F}{F + R} \Rightarrow F + R = \frac{F}{\psi}$$

$$R = \frac{F}{\psi} - F \Rightarrow R = F\left(\frac{1}{\psi} - 1\right)$$

Calcul de l'épaisseur  $t$  pour les densités suivantes :

Verre = 2,56

Polyester = 1,2

$$t = \frac{F}{2,56} + \frac{R}{1,2} \Rightarrow t = \frac{1,2F + 2,56R}{3,072}$$

Puisque  $R = F\left(\frac{1}{\psi} - 1\right)$  :

$$t = \frac{1,2F + 2,56F\left(\frac{1}{\psi} - 1\right)}{3,072} = \frac{F\left[1,2 + 2,56\left(\frac{1}{\psi} - 1\right)\right]}{3,072}$$

$$t = \frac{F}{3,072} \left(1,2 + \frac{2,56}{\psi} - 2,56\right) = \frac{F}{3,072} \left(\frac{2,56}{\psi} - 1,36\right)$$

A partir d'un grammage de fibres et d'un taux massique de fibres sur le total fibres + résine, on obtient l'épaisseur en appliquant la formule ci-dessus comme elle est développée pour le verre et le polyester.

Pour des densités différentes :

Densité de fibre :  $f$

Densité de la résine :  $d$

$$t = \frac{F}{f \times d} \left( \frac{f}{\psi} + d - f \right)$$

Exemple :

La densité de la résine époxy est d'environ 1,12.

La densité de la fibre de carbone est de 1,8

Supposons qu'on choisisse un grammage de carbone de 800 g ou 0,8 kg/m<sup>2</sup> et que le taux de fibre représente 60% de la masse totale, soit 0,6.

L'épaisseur totale du composite sera donc de 0,92 mm.

Les catalogues donnent pour la fibre de carbone unidirectionnelle alliée à la résine époxy et pour un taux  $\psi$  de 0,6, un module d'élasticité  $E_{\text{carbone}}$  de 100200 N/mm<sup>2</sup> et une résistance limite de 1000 N/mm<sup>2</sup> en traction et 500 N/mm<sup>2</sup> en compression. (non validé)  
 On colle ce composite sur les deux faces d'une mousse de 125 N/mm<sup>2</sup> de module d'élasticité  $E_{\text{mousse}}$  et d'une épaisseur de 30 mm.

Calcul sur une largeur de 10 mm :

- Inertie de la mousse :

$$\frac{30^3 \times 10}{12} = 22.500 \text{ mm}^4 \dots\dots$$

$$EI_{\text{mousse}} = 22.500 \times 125 = 2.812.500$$

- Inertie du carbone/époxy :

$$\frac{(30 + 2 \times 0,92)^3 \times 10}{12} - \frac{30^3 \times 10}{12} = 4.399 \text{ mm}^4$$

$$EI_{\text{carbone}} = 4.399 \times 100.200 = 440.779.800$$

$$EI_{\text{total}} = 2.812.500 + 440.779.800 = 443.592.300$$

Contraintes par matériau pour un moment de flexion M :

1 – Âme en mousse :

$$v = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{M \times 15 \times 125}{443.592.300} = M \times 4,226 \times 10^{-6} \text{ N / mm}^2$$

2 – fibre de carbone :



$$v = \frac{30 + 2 \times 0,92}{2} = 15,92 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{M \times 15,92 \times 100200}{443.592.300} = M \times 3,596 \times 10^{-3} \text{ N / mm}^2$$

Voir le chapitre précédent pour les contraintes de cisaillement.

### **Les contreplaqués**

**U**n contreplaqué est constitué de différents plis collés les uns sur les autres en alternant le sens des fibres.

En principe on colle les plis autour d'une âme et de manière symétrique. Le procédé équilibre ainsi les contraintes internes du bois et par conséquent garantit une certaine planimétrie du contreplaqué.

On rencontre souvent de réelles difficultés à obtenir les caractéristiques mécaniques d'un contreplaqué donné. Quand il devient nécessaire de les connaître avec assez de précisions, on peut s'exercer à effectuer quelques contrôles.

Lorsque le contreplaqué est constitué d'une seule essence, par exemple « tout okoumé » on peut déterminer ses caractéristiques techniques en effectuant des tests de flexion d'un échantillon débité avec le fil apparent en longueur et un autre échantillon débité avec le fil apparent en travers.

Nous avons vu qu'une poutre rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$  appuyée sur deux appuis espacés de  $l$  et soumise à une force (charge)  $P$  en son milieu accu-

sera un flèche égale à  $f = \frac{Pl^3}{48EI}$

On en déduit donc  $EI = \frac{Pl^3}{48f}$

La valeur de  $EI$  est égale ici à  $\frac{E \times bh^3}{12}$  ; c'est-à-dire

l'inertie de toute la section de l'échantillon  $\times E$ .

Ces tests nous permettent donc d'obtenir les « raideurs » des l'échantillons  $EIL$  avec les fibres apparentes en longueur et  $EIT$  en travers.

Nous ne connaissons pas les valeurs des modules d'élasticité de l'okoumé massif en long ou en travers ; nous pouvons essayer de les connaître en effectuant les tests sur des échantillons de « 12 mm » de 40 mm de large et 11,6 mm d'épaisseur.

$$I = \frac{11.6^3 \times 40}{12} = 5203 \text{ cm}^4$$

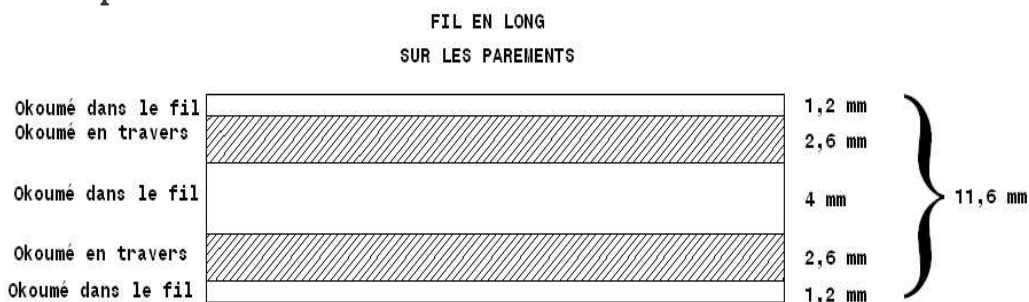
Nous relevons les caractéristiques suivantes :

$$EIL = 27\,379\,755 \text{ N/mm}^2$$

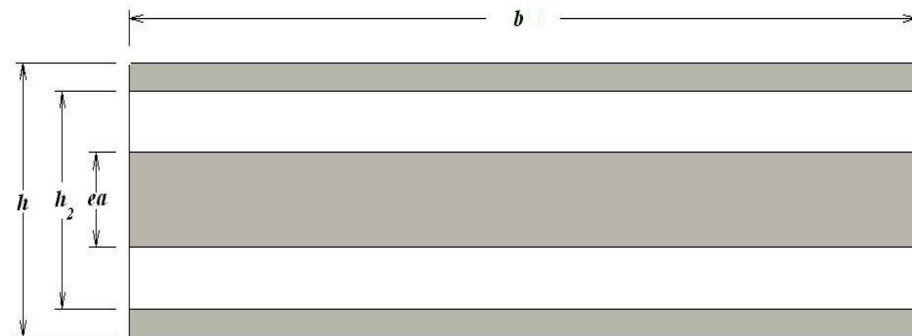
$$EIT = 23\,609\,515 \text{ N/mm}^2$$

Dans un premier temps on mesure l'épaisseur des plis constitutifs.

Exemple :



Puis on calcule les inerties cumulées des plis selon le sens des fibres (avec  $b = 40 \text{ mm}$ ) :



$$IL = b \frac{[h^3 - h_2^3] + ea^3}{12} = 2821 \text{ mm}^4$$

$$IT = b \frac{h_2^3 - ea^3}{12} = 2382 \text{ mm}^4$$

$$(2821 + 2382 = 5203 \text{ cm}^4)$$

En prenant :

$EL$  = le module en long du bois massif et

$ET$  = le module en travers, on peut écrire :

$$IL \times EL + IT \times ET = EIL \quad (27\,379\,755 \text{ N/mm}^2)$$

$$\text{on déduit } ET = \frac{EIL - IL \times EL}{IT}$$

$$IL \times ET + IT \times EL = EIT \quad (23\,609\,515 \text{ N/mm}^2)$$

$$\text{on déduit } ET = \frac{EIT - IT \times EL}{IL}$$

Il y a donc égalité des termes :

$$\frac{EIL - IL \times EL}{IT} = \frac{EIT - IT \times EL}{IL}$$

$$IT \times EIT - IT^2 \times EL = IL \times EIL - IL^2 \times EL$$

$$IT \times EIT - IL \times EIL = IT^2 \times EL - IL^2 \times EL$$

$$IT \times EIT - IL \times EIL = EL [IT^2 - IL^2]$$

Modules déduits de l'okoumé massif des plis :

$$EL = \frac{IT \times EIT - IL \times EIL}{IT^2 - IL^2} \approx 9200 \text{ N/mm}^2$$

$$ET = \frac{EIL - IL \times EL}{IT} \approx 600 \text{ N/mm}^2$$

Ces chiffres sont cohérents et permettent de déduire le module d'élasticité du bois massif en travers du fil, module qui n'est jamais donné, trop aléatoire et trop peu significatif sans doute..

En reprenant le calcul de *EIL* et *EIT* avec ces chiffres, on retombe bien sur les valeurs déduites :

Calcul avec le fil apparent en longueur :

Elément	mm		° Angle	N/mm <sup>2</sup>		mm CG	mm <sup>4</sup> I
	H	L		Et	Ec		
OKOUMÉ dans le fil	1,2000	40,0000	0,00	9200	9200	0,6000	5,760000
Okoumé en travers	2,6000	40,0000	0,00	600	600	2,5000	58,5867
OKOUMÉ dans le fil	4,0000	40,0000	0,00	9200	9200	5,8000	213
Okoumé en travers	2,6000	40,0000	0,00	600	600	9,1000	58,5867
OKOUMÉ dans le fil	1,2000	40,0000	0,00	9200	9200	11,0000	5,760000

Surface totale 464,000  
 Fibre neutre 5,800  
 Inertie totale 5 202,986667  
 EI haut 13 689 877,333  
 EI bas 13 689 877,333  
 EI total 27 379 754,667\*\*\*\*\*  
 Ef résultant 5262 N/mm<sup>2</sup>

Calcul avec le fil apparent en travers :

Elément	mm		° Angle	N/mm <sup>2</sup>		mm CG	mm <sup>4</sup> I
	H	L		Et	Ec		
Okoumé en travers	1,2000	40,0000	0,00	600	600	0,6000	5,760000
OKOUMÉ dans le fil	2,6000	40,0000	0,00	9200	9200	2,5000	58,5867
Okoumé en travers	4,0000	40,0000	0,00	600	600	5,8000	213
OKOUMÉ dans le fil	2,6000	40,0000	0,00	9200	9200	9,1000	58,5867
Okoumé en travers	1,2000	40,0000	0,00	600	600	11,0000	5,760000

Surface totale 464,000  
 Fibre neutre 5,800  
 Inertie totale 5 202,986667  
 EI haut 11 804 757,333  
 EI bas 11 804 757,333  
 EI total 23 609 514,667\*\*\*\*\*  
 Ef résultant 4538 N/mm<sup>2</sup>

Les valeurs des modules à retenir seront donc pour le contreplaqué » composite » :

E en longueur : 5262 N/mm<sup>2</sup>

E en travers : 4538 N/mm<sup>2</sup>

Les modules servent à calculer la répartition des contraintes dans un matériau composite constitués de  $n$  assemblages de matériaux différents.

Est-ce qu'un contreplaqué constitué de beaucoup de plis de même essence pour la même épaisseur sera plus solide qu'un autre avec moins de plis ? C'est en général ce qu'on pense de façon intuitive. Mais le bois ne devient pas mécaniquement plus résistant et plus rigide s'il change d'épaisseur... Sauf s'il s'imprègne de résine, ce qui peut être le cas avec des plis très minces. En restant dans notre cadre comparatif avec un poids toujours égal, que deviendrait notre échantillon saturé de résine ? Il serait plus lourd ! Il faudrait diminuer son épaisseur pour préserver son poids et sa résistance s'amenuiserait inexorablement comme nous l'avons démontré. En principe les plis ne s'imprègnent pas de résine à cœur et la différence de poids n'est pas significative si le contreplaqué présente 5, 7 ou 9 plis, la densité ne change pratiquement pas. En revanche, les modules seront mieux équilibrés entre le fil apparent en longueur ou en travers car les volumes des fibres en largeur ou en longueur seront plus équivalents.

Tout dépend de l'utilisation prévue.

Ci-dessus, nous avons des modules (E) de 5262 et 4538 pour un CP de 5 plis. Si le nombre de plis aug-

mente, les modules seront plus proches, par exemple 5000 et 4800...

**Les surfaces développables** des contreplaqués sont extrêmement difficiles à prévoir par la théorie pure.

En effet, une théorie qui ne considérerait que des surfaces développables sans épaisseur serait inexacte.

Le contreplaqué se présente, de façon imagée, avec deux surfaces, dessus et dessous, en opposition de contraintes lors de toute tentative de mise en forme.

Là, je dois dire que mes connaissances trouvent leurs limites dans ce genre de problème – entre autres ! –

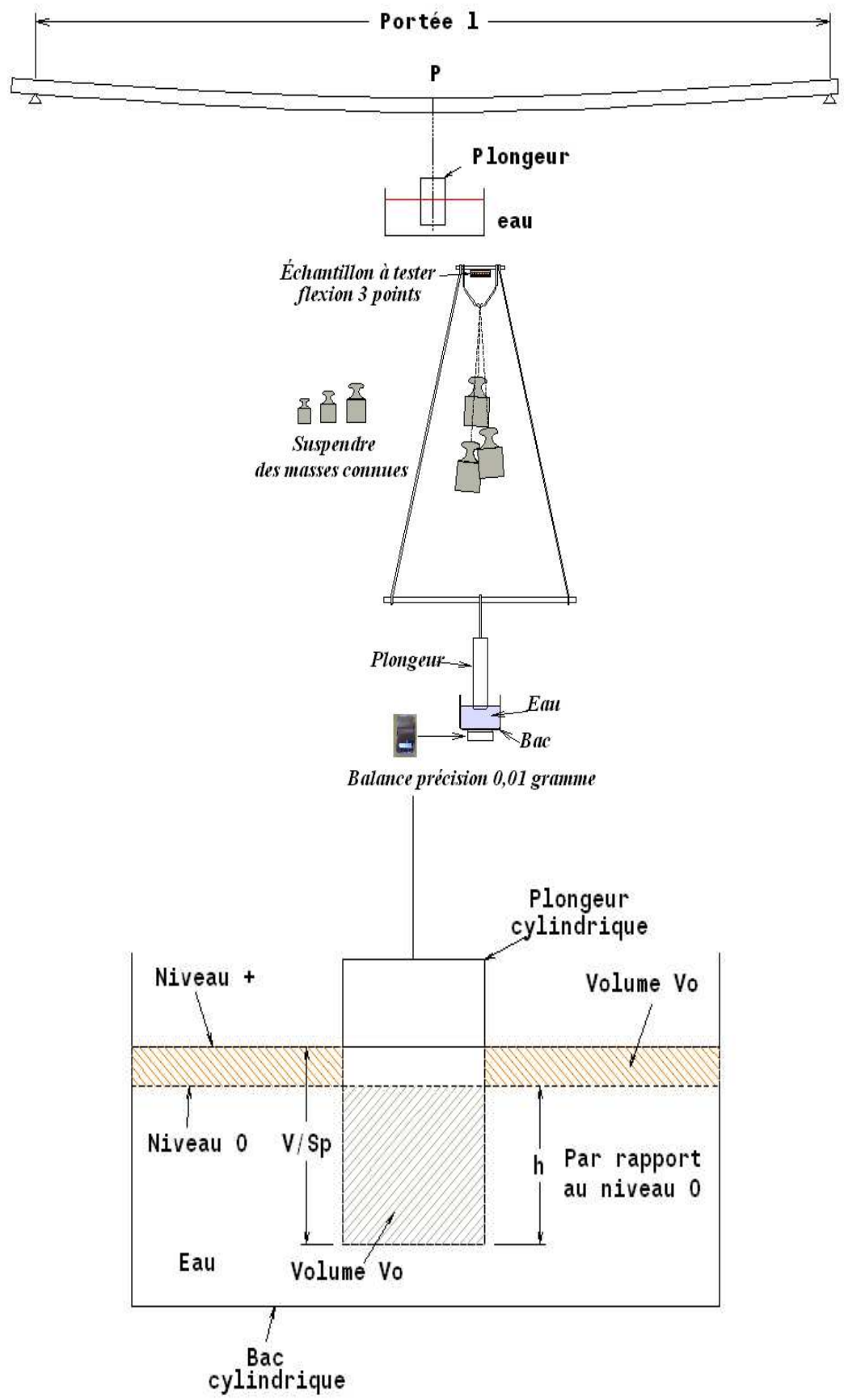
Pourtant j'ai dessiné nombre de navires « développables » dans ma vie en faisant appel uniquement à mon expérience.....

\*

## Mesure des flèches

**P**our tester des échantillons, le principal problème consiste à mesurer précisément la valeur des flèches accusées par une poutre soumise à différentes charges connues. Étant donné que les tests ne sont valables que pour les petites déformations, ces mesures doivent être aussi précises que possible.

On peut imaginer le dispositif suivant, lequel est assez simple à mettre en œuvre et très peu onéreux ; il s'agit de mesurer la poussée d'Archimède à l'aide d'une balance de précision.



Le « plongeur » est cylindrique, le bac est cylindrique (non évasé).

Lorsque le plongeur descend de la valeur «  $h$  », correspondant exactement à la valeur de la flèche, la poussée hydrostatique donne une pesée «  $P$  » sur la balance, alors que le niveau de l'eau monte d'un volume  $V_0$  en relation avec le diamètre du plongeur et le diamètre du bac. Disons que :

- $S_b$  = surface de la base du bac
- $S_p$  = surface de la base du plongeur
- $S_d$  = surface  $S_b - S_p$

On peut donc écrire :  $V_0 = h \times S_p$

Le niveau de l'eau dans le bac remonte en même temps d'une hauteur correspondant au volume  $V_0$  déplacé :  $\frac{h \times S_p}{S_d}$

D'où le volume total immergé du plongeur :

$$V = S_p \left( h + \frac{h \times S_p}{S_d} \right) \text{ et } \frac{V}{S_p} = h \left( \frac{S_p}{S_d} + 1 \right)$$

$$\text{mais encore : } \frac{V}{h} = S_p \left( \frac{S_p}{S_d} + 1 \right)$$

$$\text{en posant } k = S_p \left( \frac{S_p}{S_d} + 1 \right) = \underline{\text{constante}}$$

$$\text{il vient } h = \frac{V}{k}$$

$V$  est directement lisible sur la balance, fonction de la poussée d'Archimède qui dépend de la densité de



l'eau et du calibrage de la balance.

On peut utiliser une jauge de hauteur  $j$  connue avec précision et l'utiliser pour connaître la valeur de  $k$ .

$$k = \frac{P_0}{j} \text{ avec } P_0 = \text{pesée lue sur la balance.}$$

A partir de là, toute pesée  $P_i$  sur la balance donnera automatiquement la valeur de  $h$  (la flèche  $f$ ) grâce au facteur  $k$  qui tient compte de tous les ajustements, de telle sorte qu'il n'est point besoin de connaître ni la densité de l'eau ni la dimension du plongeur, ni la di-

$$\text{mension du bac. } f_i = \frac{P_i}{k}$$

Un plongeur de grand diamètre dans un bac de petit diamètre donnera plus de précision que l'inverse mais quoi qu'il en soit, le procédé est simple à mettre en œuvre et utile pour effectuer quelques tests maison sans investir dans un outillage très onéreux.

Exemple à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D	E
1	Calibrage : h mesurée mm	10,0	Calibrage : pesé g	6,17	
2	Portée (mm)	800	FACTEUR K	0,61700	
3	ECHANTILLON : CP tout Okoumé n° 1 dans le fil				
4	Poids (kg)	Pesée (g)	Flèche (mm)	Charge finale (kgf)	EI(kgf/mm <sup>2</sup> )
5	0	0	0,00	0	0
6	0,998	2,11	3,42	0,99589	3106295,8
7	0,9	4,05	6,56	1,89395	3077707,7
8	0,919	5,95	9,64	2,81105	3109320,5
9	1	8,02	13,00	3,80898	3125706,6
10					
11					
12					
13					
14					
15	EI après lissage kgf/mm <sup>2</sup>	3113656,0			
16	EI N/mm <sup>2</sup>	30544965,0			
17					
18					
19			H(mm)	L(mm)	I(mm <sup>4</sup> )
20			11,7	40,2	5365,404
21	E N/mm <sup>2</sup>	5692,95			

Le calibrage est effectué avec un pige de 10 mm, le poids relevé sur la balance est de 6,17 grammes.

$$k = \frac{6,17}{10} = 0,617$$

La première pesée avec une charge de 0,998 kg donne 2,11 grammes sur la balance

$$f = \frac{2,11}{0,617} = 3,42mm$$

et ainsi de suite.

La charge finale en kg, sera égale à la charge effective moins celle de la poussée d'Archimède donnée par l'immersion du plongeur : 0,998 – 0,00211

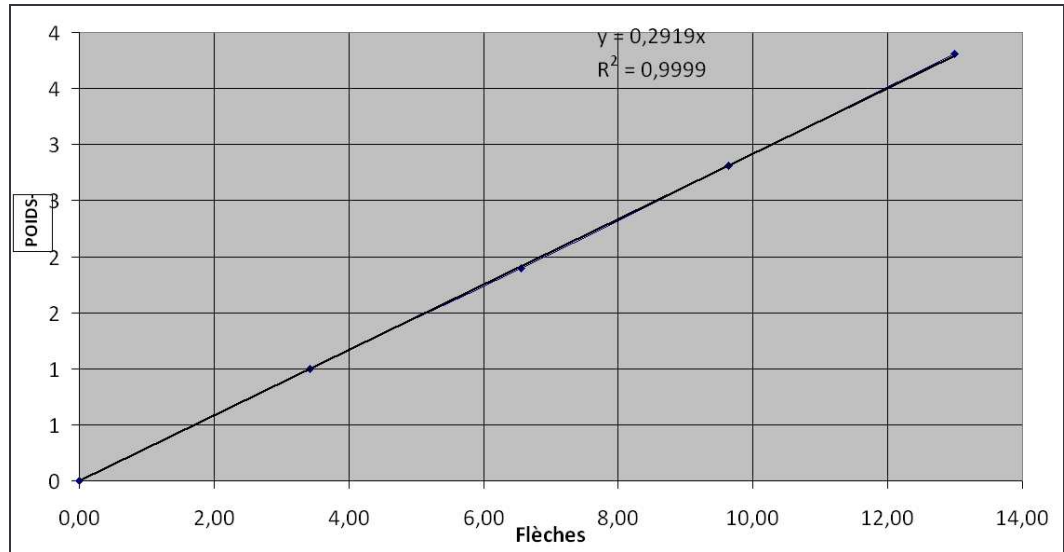
La collection des points relevés doivent se tenir au plus près d'une droite de fonction  $y=ax$  (loi de Hooke) qui est censée respecter la proportionnalité des flèches selon les charges correspondantes.

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

pour une poutre chargée localement en son milieu. Les dimensions de la poutre donnent l'inertie  $I$ , ce qui permet de déduire  $E$ , le module d'élasticité recherché.

$$E = \frac{Pl^3}{48 \times I \times f} \dots\dots\dots E = \frac{l^3}{48 \times I} \times \frac{P}{f} \dots\dots\dots P = a \times f$$

$$E = \frac{l^3}{48 \times I} \times a$$



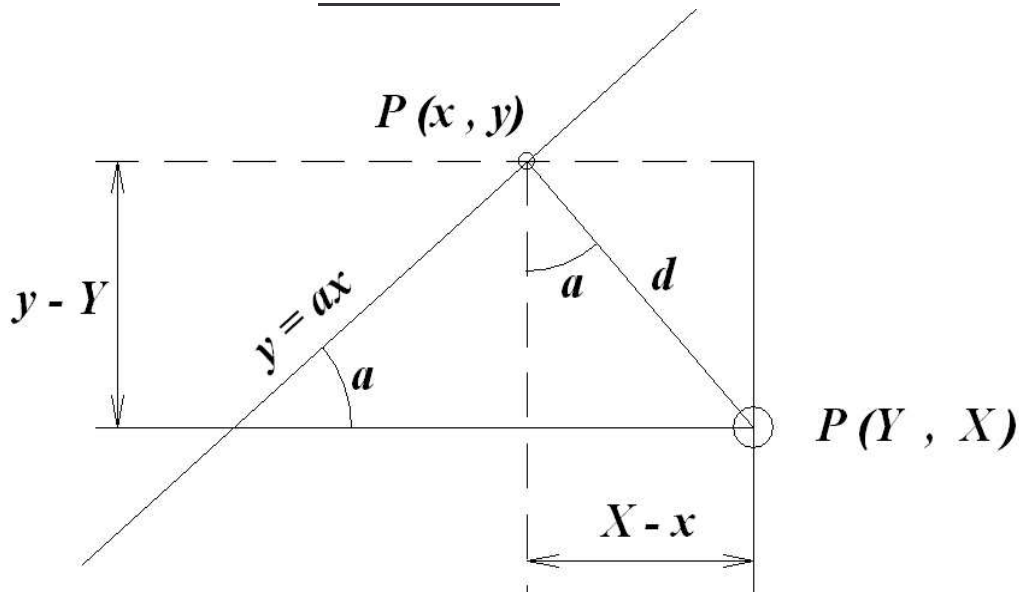
Le tableur propose le calcul de la régression linéaire selon la formule par les moindres carrés qui permet de tracer une droite de régression correcte et de finalement donner un module  $E$  moyen.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i^2 - X_i^2) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (Y_i^2 - X_i^2)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^n (X_i Y_i)\right)^2}}{2\sum_{i=1}^n X_i Y_i}$$

J'ai pris un certain plaisir à « démonter » cette formule. Je ne résiste pas à la développer dans le chapitre suivant pour les intéressés.

## Régression orthogonale par les moindres carrés avec une droite passant par l'origine

Il s'agit de calculer la fonction d'une droite passant par l'origine dont les distances  $d_i^2$ , des points de la collection  $P(X_i, Y_i)$ , normales à la droite  $y = ax$  soient minimum. Inconnue : a



$$X - x = a(y - Y) ; y = ax \text{ d'où } X - x = a(ax - Y)$$

$$a(ax - Y) = X - x \Rightarrow a^2x - aY = X - x$$

$$a^2x - aY = X - x \Rightarrow a^2x = X - x + aY$$

$$a^2x + x = X + aY \Rightarrow x(a^2 + 1) = X + aY$$

$$x = \frac{X + aY}{(a^2 + 1)} \text{ et } y = a \frac{X + aY}{(a^2 + 1)} \text{ puisque } y = ax$$

Calcul de  $d^2$  :

$$d^2 = (X - x)^2 + (y - Y)^2 = dx^2 + dy^2$$

....développons

$$dx = X - \frac{X + aY}{a^2 + 1} = \frac{X(a^2 + 1)}{a^2 + 1} - \frac{X + aY}{a^2 + 1}$$

$$dx = \frac{X(a^2+1) - X - aY}{a^2+1} = \frac{a^2X + X - X - aY}{a^2+1}$$

$$***** dx = \frac{a(aX - Y)}{a^2+1}$$

$$dy = a \frac{X + aY}{a^2+1} - Y = \frac{a^2Y + aX}{a^2+1} - Y = \frac{a^2Y + aX - a^2Y - Y}{a^2+1}$$

$$***** dy = \frac{aX - Y}{a^2+1}$$

Maintenant :

$$d^2 = \frac{a^2(aX - Y)^2 + (aX - Y)^2}{(a^2+1)^2}$$

Le facteur commun :  $(aX - Y)^2$  implique :

$$d^2 = \frac{(aX - Y)^2(a^2+1)}{(a^2+1)^2} = \frac{(aX - Y)^2}{a^2+1} = \frac{1}{a^2+1}(aX - Y)^2$$

Calcul sur les sommes :

$$D^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a^2+1} (aX_i - Y_i)^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a^2+1} (a^2 X_i^2 - 2aY_i X_i + Y_i^2)$$

$$D^2 = \frac{1}{a^2+1} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2 \frac{a}{a^2+1} \sum_{i=1}^n Y_i X_i + \frac{a^2}{a^2+1} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$D^2 \text{ minimum lorsque } \frac{dD^2}{da} = 0$$

$$\text{dérivée de } \frac{1}{a^2+1} = \frac{-2a}{(a^2+1)^2} \dots \dots \dots \left[ \frac{-u'}{u^2} \right]$$

$$\text{dérivée de } -2 \frac{a}{a^2+1} = -2 \frac{a^2+1 - a \cdot 2a}{(a^2+1)^2} = -2 \frac{a^2+1 - 2a^2}{(a^2+1)^2} = -2 \frac{1 - a^2}{(a^2+1)^2}$$

$$\text{dérivée de } \frac{a^2}{a^2+1} = \frac{2a(a^2+1) - 2a \cdot a^2}{(a^2+1)^2} = \frac{2a^3 + 2a - 2a^3}{(a^2+1)^2} = \frac{2a}{(a^2+1)^2}$$

$$\dots\dots\dots\left[\frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$$

$$\frac{dD^2}{da} = \frac{-2a}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2 \frac{1 - a^2}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i X_i + \frac{2a}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

$$\frac{dD^2}{da} = \frac{-2a}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2 \frac{1}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i X_i + 2 \frac{a^2}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i X_i + \frac{2a}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

$$\frac{dD^2}{da} = -2a \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n Y_i X_i + 2a^2 \sum_{i=1}^n Y_i X_i + 2a \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

$$\frac{dD^2}{da} = a^2 \sum_{i=1}^n Y_i X_i + a \sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2) - \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 0$$

Équation du second degré :  $pa^2 + ba + c$

Inconnue = a

$$p = \sum_{i=1}^n Y_i X_i$$

$$b = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2)$$

$$c = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2)\right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^n (X_i Y_i)\right)^2}}{2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i}$$

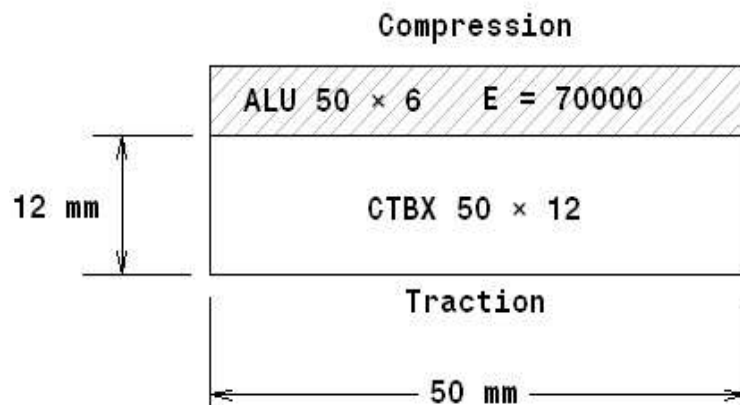
## Détermination des modules d'élasticité E en traction et en compression dans un même matériau

L'idéal serait de disposer d'un outillage de mesure très sophistiqué permettant de tester les matériaux directement en traction et en compression. Mais quand il s'agit d'un composite assez mince, le test en compression n'est pas si évident à mener.

La méthode ci-dessous utilise les formules de la RDM appliquées aux poutres soumises à des moments de flexion.

Le principe est de former une poutre composée de deux matériaux différents dont un avec des caractéristiques parfaitement connues. Par exemple un métal isotrope comme l'acier ou l'aluminium.

Supposons que l'on désire tester un échantillon de contreplaqué tout Okoumé de 12 mm afin de connaître ses modules d'élasticité, en traction et en compression.



On commence par coller, par exemple, un plat d'aluminium de 50 x 6 mm d'épaisseur et de module  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ , sur le contreplaqué comme dessiné.

Ensuite on place ce composite entre deux appuis espacés de, par exemple un mètre, et on mesure sa rai-

deur totale EI : 343713940 N.mm<sup>2</sup>.

La moitié de cette « raideur » sera affectée à la compression et l'autre moitié à la traction , donc :

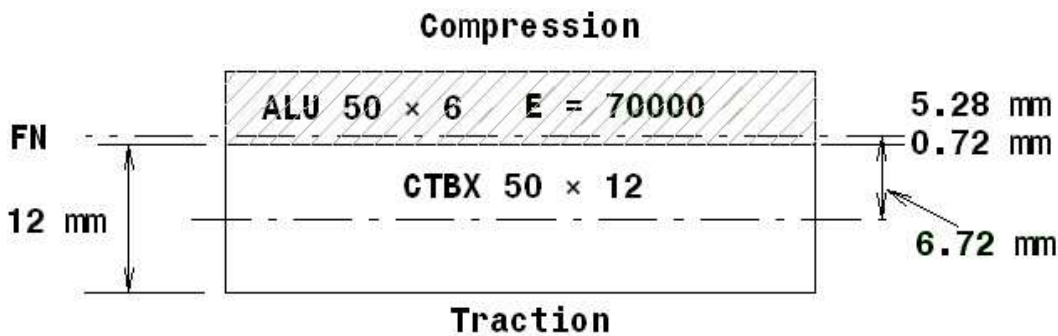
$$EI_c = EI_t = \frac{343713940}{2} = 171856970 \quad (1)$$

Calcul de la position de la fibre neutre :

$$I_{\text{alu}} = \frac{171856970}{70000} = 2455,1 \text{ mm}^4$$

Partie de l'alu soumise à la compression :

$$\frac{50 \times e_c^3}{3} = 2455,1 \text{ mm}^4 \Rightarrow e_c = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2455,1}{50}} = 5,28 \text{ mm}$$



La fibre neutre passe bien dans l'épaisseur de l'alu.

Partie de l'alu soumise à la traction :

$$6 - 5,28 = 0,72 \text{ mm}$$

$$EI_{\text{alu en traction}} = \frac{0,72^3 \times 50 \times 70000}{3} = 435466$$

EI du contreplaqué en traction :

$$171856970 - 435466 = 171424514 \quad (\text{voir 1})$$

Maintenant, l'inertie du contreplaqué par rapport à la fibre neutre :  $(I_0 + Sd^2)$  :

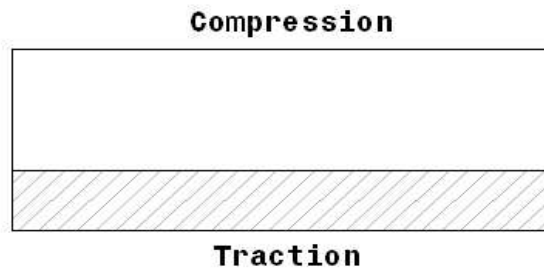
$$\frac{50 \times 12^3}{12} + 50 \times 12 \times 6,72^2 = 34295 \text{ mm}^4$$

Pour finir, module  $E_t$  du contreplaqué :



$$E_t = \frac{171424514}{34295} = 5010. N / mm^2$$

Maintenant on retourne le composite avec l'alu en dessous :



Raideur EI mesurée de l'ensemble : 319345600

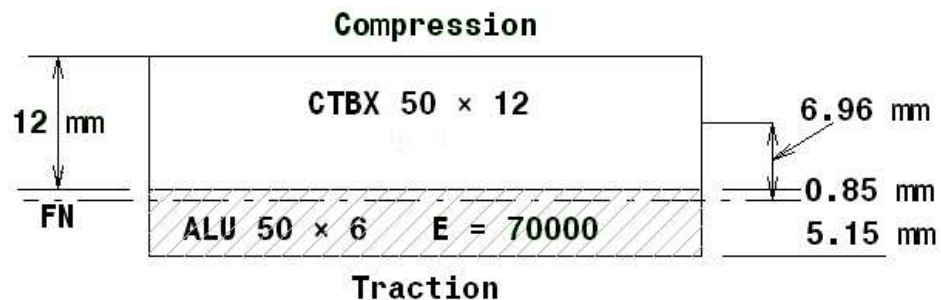
$$EI_c = EI_t = \frac{31934560}{2} = 159672800$$

Calcul de la position de la fibre neutre :

$$I_{\text{alu}} = \frac{159672800}{70000} = 22810. mm^4$$

Partie de l'alu soumise à traction :

$$\frac{50 \times e_t^3}{3} = 22810. mm^4 \Rightarrow e_t = \sqrt[3]{\frac{3 \times 22810}{50}} = 5,15. mm$$



EI de l'alu soumis à compression :

$$\frac{0,85^3 \times 50 \times 70000}{3} = 716479$$

EI du contreplaqué soumis à compression :

$$159672800 - 716479 = 158956320$$

Maintenant, l'inertie du contreplaqué par rapport à la fibre neutre :  $(I_0 + Sd^2)$  :

$$\frac{12^3 \times 50}{12} + 12 \times 50 \times 6,96^2 = 36265 .mm^4$$

Pour finir, module  $E_c$  du contreplaqué :

$$E_c = \frac{158956320}{36265} = 4380 .N .mm^2$$

Résumé :  $E_t = 5010 .N / mm^2 - E_c = 4380 .N / mm^2$

\*

### **Choix d'une essence**

pour la confection du bordé

On peut choisir sans aucune hésitation une essence de bois ou une autre selon la tradition, selon l'expérience séculaire, selon ce qui a été fait. Les anciens navires de pêche de Bretagne étaient bordés en Chêne. Pendant la même période, les Américains concevaient leurs bordés en Pin d'Orégon ou en Red Cedar, ce qui est radicalement différent. Les pays ne possédaient pas tous les mêmes essences disponibles à tous moments. Les charpentiers se sont adaptés par la force des choses.

Aujourd'hui les choix peuvent s'effectuer sans restriction aucune. On procédera encore par expérience compte tenu de l'accroissement de la connaissance des us et coutumes d'ici et d'ailleurs. Il apparaît que les bois les plus durables ne sont pas ceux qui viennent à l'esprit : le Chêne, le Teck, les Acajous, etc.. Non, les bois tendres comme les Cyprès ou les Thuyas s'avèrent plus durables, même en milieux humides.

Nous avons par exemple le choix entre deux essences mécaniquement très avantageuses : le Red Cedar (RC – Thuya Plicata) et le Yellow Cedar (YC – Yellow Cypres).

Dans un premier temps nous devons connaître les caractéristiques mécaniques des bois retenus avant d'effectuer la moindre comparaison ; c'est ici un aspect difficile du problème car le bois n'est pas un matériau mécaniquement très constant, il dépend de nombreux critères, géographiques, climatiques, d'espèces différentes pour une même appellation, de débit sur quartiers ou sur dosses, etc, etc...

Pour l'exemple, je prendrai les caractéristiques suivantes, sans garantir en aucune manière, la réalité de celles-ci :

**Yellow Cedar : (YC)**

Module d'élasticité : 9240 N/mm<sup>2</sup>

Module de résistance en flexion : 69 N/mm<sup>2</sup>

Densité : 430 kg/m<sup>3</sup>

**Red Cedar : (RC) selon CIRAD**

Module d'élasticité : 8800 N/mm<sup>2</sup>

Module de résistance en flexion : 59 N/mm<sup>2</sup>

Densité : 380 kg/m<sup>3</sup>

La démarche consiste à obtenir les mêmes caractéristiques mécaniques pour différentes essences en jouant sur l'épaisseur. Prenons le Yellow Cedar comme échantillon de référence d'un bordé de 10 mm de large et de 30 mm d'épaisseur, sans stratification pour commencer et comparons-le avec le Red Cedar.

**La raideur** sera caractérisée par le «  $EI$  » des sections. Les épaisseurs selon les essences donnant le même «  $EI$  » devront satisfaire la relation :

$$E_{YC} \times I_{YC} = E_{RC} \times I_{RC} \text{ avec :}$$

$I_{YC}$  proportionnel à  $e_{YC}^3$  et  $I_{RC}$  proportionnel à  $e_{RC}^3$

soit :

$$30^3 \times 9240 = e_{RC}^3 \times 8800 \text{ ce qui donne :}$$

$$e_{RC}^3 = \frac{30^3 \times 9240}{8800} \Rightarrow e_{RC} = \sqrt[3]{\frac{30^3 \times 9240}{8800}} = 30,49 \text{ mm}$$

Poids des échantillons :

$$\text{Yellow Cedar : } 0,03 \times 430 = \mathbf{12,9 \text{ kg/m}^2}$$

$$\text{Red Cedar : } 0,03049 \times 380 = \mathbf{11,59 \text{ kg/m}^2}$$

À raideur égale, le Red Cedar est moins lourd de **1,31 kg/m<sup>2</sup>** dans ce cas de figure.

**La solidité** sera donnée par  $\sigma = \frac{mv}{I}$  ou  $\sigma = \frac{m}{I/v}$

Avec

$\sigma$  = taux de contrainte (N/mm<sup>2</sup>)

$m$  = moment de flexion

$v$  = demi-épaisseur soit  $e / 2$

$$I/v = \frac{e^2}{6} \text{ comme nous l'avons vu déjà.}$$

À contrainte  $\sigma$  précisée pour les deux matériaux, la relation devient :

$$\sigma_{YC} = \frac{m}{e_{YC}^2} \text{ et } \sigma_{RC} = \frac{m}{e_{RC}^2}$$

À moment égal :  $m = \sigma_{YC} \times e_{YC}^2 = \sigma_{RC} \times e_{RC}^2$

$$e_{RC}^2 = \frac{\sigma_{YC} \times e_{YC}^2}{\sigma_{RC}} \text{ et finalement :}$$

$$e_{RC}^2 = \frac{69 \times 30^2}{59} \Rightarrow e_{RC} = \sqrt{\frac{69 \times 30^2}{59}} = 32,44 \text{ mm}$$

épaisseur respectant les contraintes maximales supportée pour chacun des matériaux.

Poids des échantillons :

Yellow Cedar :  $0,03 \times 430 = \mathbf{12,9 \text{ kg/m}^2}$

Red Cedar :  $0,03244 \times 380 = \mathbf{12,33 \text{ kg/m}^2}$

Le gain de poids se monte à  $0,57 \text{ kg/m}^2$

Selon le critère de résistance, les poids sont assez proches mais cela n'emporte pas la décision pour autant car nous devons décider de donner la priorité soit à la raideur, soit à la solidité en étudiant la section plus en détail avec les limites de souplesse acceptable.

Voyons comment faire... La raideur doit pouvoir s'estimer avec un calcul de la flèche compte tenu d'un maximum admissible, par exemple : portée / flèche = 400.... ? Là, c'est l'expérience qui décide, mais on peut concevoir qu'une trop grande souplesse fatiguerait le matériau plus que de raison au cours du temps même si la contrainte limite n'est jamais atteinte.

Restons réalistes et imaginons ces échantillons appuyés et encastres sur deux supports espacés de 80,2 cm (l), et soumis à une pression de 0,4712 bars (p) ou 47,12 kPa, uniformément répartie.

Flèche maxi :  $802 / 400 = 2 \text{ mm} \dots ?$

$$f = \frac{pl^4}{384EI}$$

Dessignons une section stratifiée comme indiqué :

## Yellow Cedar de 30 mm d'épaisseur :

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 832 g / m<sup>2</sup>



Elément	cm		°	N/mm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec		
Verre E 50% 0-90	0,0533	1,0000	0,00	14000	14000	0,0267	0,000013
Yellow cedar	3,0000	1,0000	0,00	9240	9240	1,5533	2,250000
Verre E 50% 0-90	0,1066	1,0000	0,00	14000	14000	3,1066	0,000101

Surface totale 3,160  
Fibre neutre 1,592  
Inertie totale 2,630  
EI haut 1304,257 / 100  
EI bas 1304,257 / 100  
EI total 2608,513 / 100  
Ef résultant 9919 N/mm<sup>2</sup>

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 416 g / m<sup>2</sup>

### FLÈCHE 2,43 MM

Verre E 50% 0-90 : 26.48 N/mm<sup>2</sup> Compression  
Yellow cedar : 16.29 N/mm<sup>2</sup> Compression

Yellow cedar : 17.17 N/mm<sup>2</sup> Traction  
Verre E 50% 0-90 : 26.92 N/mm<sup>2</sup> Traction

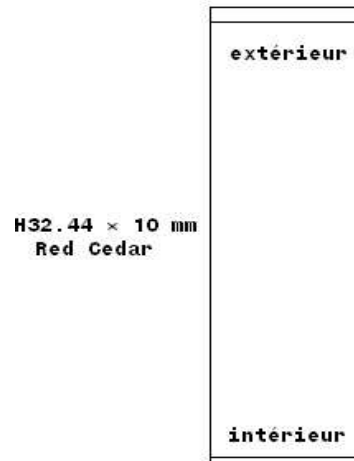
La flèche est acceptable.

Le module de résistance limite du Yellow Cedar est donné pour 69 N/mm<sup>2</sup> : 17,17 reste donc en dessous avec un coefficient de sécurité de :  $69 / 17,17 = 4,01$   
La fibre de verre peut supporter environ 140 N/mm<sup>2</sup>, on est loin des maximum.

## Red Cedar de 32,44 mm d'épaisseur :

Selon le calcul de solidité égale...

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 832 g / m2



Elément	H cm	L cm	Angle	N/mm <sup>2</sup>		cm CG	cm <sup>4</sup> I
Verre E 50% 0-90	0,0533	1,0000	0,00	14000	14000	0,0267	0,000013
RED CEDAR	3,2440	1,0000	0,00	8800	8800	1,6753	2,844863
Verre E 50% 0-90	0,1066	1,0000	0,00	14000	14000	3,3506	0,000101

Surface totale 3,404  
Fibre neutre 1,716  
Inertie totale 3,287  
EI haut 1560,042 / 100  
EI bas 1560,042 / 100  
EI total 3120,084 / 100  
Ef résultant 9491 N/mm<sup>2</sup>

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 416 g / m2

**FLÈCHE 2,03 MM**

Verre E 50% 0-90 : 23.83 N/mm<sup>2</sup> Compression  
RED CEDAR : 14.03 N/mm<sup>2</sup> Compression

RED CEDAR : 14.77 N/mm<sup>2</sup> Traction  
Verre E 50% 0-90 : 24.25 N/mm<sup>2</sup> Traction

La flèche est bien moins importante que celle du Yellow Cedar.

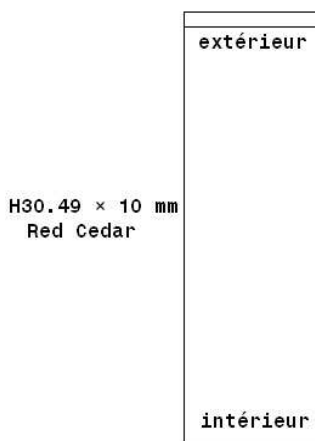
Le module de résistance limite du Red Cedar est donné pour 59 N/mm<sup>2</sup>, 14,77 N/mm<sup>2</sup> reste très en dessous avec un coefficient de sécurité de  $59 / 14,77 = 3,99$  ce qui est équivalent pour la solidité mais la flèche est moins importante, il y a donc un avantage à utiliser le Red Cedar dans ces conditions mais la différence de poids n'est que de 0,57 kg/m<sup>2</sup>.

Essayons maintenant

**Red Cedar de 30,49 mm d'épaisseur :**

Selon une raideur égale :

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 832 g / m2



Elément	H cm	L cm	Angle °	Et N/mm <sup>2</sup>	Ec N/mm <sup>2</sup>	cm CG	cm <sup>4</sup> I
Verre E 50% 0-90	0,0533	1,0000	0,00	14000	14000	0,0267	0,000013
RED CEDAR	3,0490	1,0000	0,00	8800	8800	1,5778	2,362061
Verre E 50% 0-90	0,1066	1,0000	0,00	14000	14000	3,1556	0,000101

Surface totale 3,209  
Fibre neutre 1,618  
Inertie totale 2,754  
EI haut 1312,456 / 100  
EI bas 1312,456 / 100  
EI total 2624,911 / 100  
Ef résultant 9531 N/mm<sup>2</sup>

Sergé verre époxyE 50% fibres  
verre E 416 g / m2

### FLÈCHE 2,41 MM

Verre E 50% 0-90 : 26.70 N/mm<sup>2</sup> Compression  
RED CEDAR : 15.68 N/mm<sup>2</sup> Compression

RED CEDAR : 16.52 N/mm<sup>2</sup> Traction  
Verre E 50% 0-90 : 27.19 N/mm<sup>2</sup> Traction

La flèche est identique mais les contraintes sont légèrement plus appuyées :  $59/16,52 = 3,57$  : il n'existe aucun souci à redouter concernant la solidité car on reste loin des charges de rupture.

On peut donc envisager sereinement de garder cette solution qui fait gagner **1,31 kg/m<sup>2</sup>** par rapport à l'emploi du Yellow Cedar.

Encore une fois, on constate que l'essence la plus légère emporte la préférence par la force des choses.

On pourrait choisir une section de bordé moins épaisse mais il ne faut pas oublier que le bordé participe à la structure car il forme avec elle des « raidisseurs associés ». Tout doit être considéré ensemble.



Cette petite étude doit rester indicative car les chiffres donnés ne sont pas entièrement fiables, d'où la difficulté de choisir les bons critères et surtout l'obligation de prévoir des coefficients de sécurité supérieurs à 2, ce qui est ici le cas.

On peut évidemment recalculer cette étude en prenant comme référence une section en Red Cedar ou toute autre essence ou matériau, ou toute autre configuration de stratification de verre ou de carbone....

Pour résumer les comparaisons :

### **Raideur**

$$e_{RC} = \sqrt[3]{\frac{e_{YC}^3 \times E_{YC}}{E_{RC}}}$$

### **Résistance**

$$e_{RC} = \sqrt{\frac{\sigma_{YC} \times e_{YC}^2}{\sigma_{RC}}}$$

On peut inverser les matériaux en prenant le Red Cedar, ou autre, comme référence.

## Bois moulé, rebond de démoulage

L'amélioration des adhésifs a permis de concevoir des structures en bois de taille illimitée grâce à la technique du bois moulé. Le bois a donc retrouvé ses lettres de noblesse et ses avantages dans ses utilisations mécaniques, surtout lorsque le poids devient critique.

Il est dorénavant possible de construire des poutres en bois de dimensions gigantesques d'un seul tenant comme on peut le voir par l'exemple des charpentes de grands entrepôts, salles de sport, etc...

Par ailleurs, le bois moulé permet de travailler des formes courbes qui avantagent encore les qualités mécaniques des structures.

En construction navale, la souplesse du bois est très avantageuse mais jusqu'où faut-il aller dans la torture d'une « latte » pour pouvoir la travailler à froid ?

Le problème sera de savoir quelle épaisseur choisir en fonction d'un rayon de courbure donné lorsqu'on cherche à limiter le nombre de plis car un grand nombre de plis augmente la durée du travail, la quantité de colle et éventuellement les pertes.

### Courbe de forme circulaire

Nous avons vu que le rayon de courbure  $R = \frac{EI}{M}$

Donc  $M = \frac{EI}{R}$  et comme  $\sigma = \frac{Mv}{I}$ , il vient :

$$\sigma = \frac{EI}{R} \times \frac{v}{I} \text{ ce qui donne finalement } R = \frac{Ev}{\sigma}$$

$v$  est la demi-épaisseur «  $e$  » de la latte, donc ;

$$R = \frac{Ee}{2\sigma} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{R2\sigma}{E}$$

La contrainte admissible  $\sigma$  et le module d'élasticité  $E$  sont connus. Avec cette formule, «  $e$  » peut-être directement déterminé à partir d'un rayon de courbure minimum, lequel peut être estimé par sa mesure sur l'épure en construction.

En revanche un petit nombre de plis donne un retrait de démoulage plus important. Alors peut-on le prévoir à l'avance ?

Le rayon de courbure  $R = \frac{EI}{M}$  est donné à toutes les

positions  $x$  quelconques de la « poutre ». On déduit que si  $R$  est constant sur une portion de courbe circulaire et que  $EI$  est également constant, alors le moment de flexion  $M$  est constant, c'est-à-dire réparti uniformément le long de la courbe.

Si on contraint un premier pli sur une forme – un moule – de rayon  $R$ , alors le moment constant  $M_1$  sera à calculer en prenant le rayon  $R +$  la demi-épaisseur où se situe la fibre neutre du pli. «  $e$  » étant l'épaisseur de chaque pli.

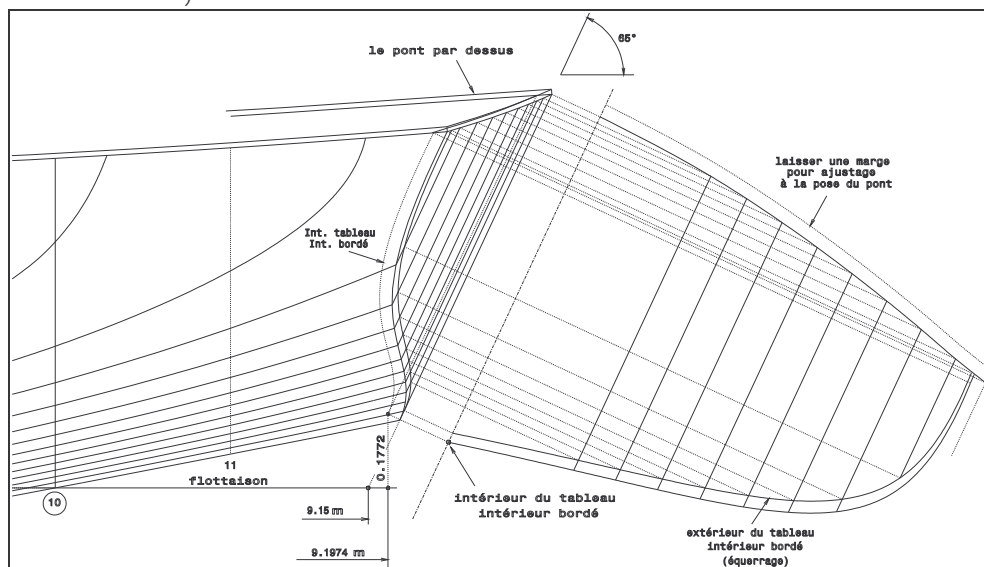
$$M_1 = \frac{EI}{R + \left(\frac{e}{2}\right)} \quad \text{constant pour ce pli.}$$

Maintenant collons un deuxième pli de même épaisseur et de même matériau sur le premier ; il sera soumis à un moment de flexion constant  $M_2 = \frac{EI}{R + e + \left(\frac{e}{2}\right)}$

et ainsi de suite pour tous les «  $n$  » plis composant le « bois moulé » à froid.

La mise en forme forcée laisse les tensions internes actives pour un temps assez long, avant que les cellules du bois se réajustent et finissent par s'adapter.

Supposons qu'on veuille contre-coller des plis de contreplaqué pour former un tableau arrière courbe selon un rayon bien défini, ici le rayon intérieur est précisé à 3,10 m.



Le tableau sera constitué ici de 4 plis de contreplaqué de 8 mm d'épaisseur. Quel sera le rayon du moule de fabrication ?

On commence par calculer le moment de flexion total de tous les plis contraints ensemble sur le moule de rayon  $R$ .

Le  $EI$  de chaque pli sera  $= E \frac{e^3}{12}$  pour une largeur de poutre égale à l'unité choisie.

$$1^{\text{er}} \text{ pli} : M_1 = EI / \left( R + \frac{e}{2} \right)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ pli : } M_2 = EI / (R + \frac{e}{2} + e)$$

$$3^{\text{ème}} \text{ pli : } M_3 = EI / (R + \frac{e}{2} + 2e)$$

$$4^{\text{ème}} \text{ pli : } M_4 = EI / (R + \frac{e}{2} + 3e)$$

$$\text{Moment total : } M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

Lorsque les 4 plis sont contre-collés, ils forment une pièce de 4 fois 8 = 32 mm d'épaisseur avec une iner-

tie égale à  $EI_{\text{Plis-collés}} = E \frac{(n \times e)^3}{12}$  pour un nombre de

plis «  $n$  ».

À la libération des presses, le moment total  $M$  est toujours présent comme tension interne. Puisque ce moment  $M$  est uniformément réparti, la courbe après libération reste une courbe circulaire dont le rayon de

courbure serait :  $R = E \frac{(4 \times e)^3}{12 \times M}$  à la fibre neutre du

nouveau matériau constitué des 4 plis, mais seulement pour une poutre sans courbure à l'origine. Comme elle possède déjà une courbure connue, celle du moule de fabrication, nous devons en tenir compte pour obtenir la courbure après démoulage. Soit :

Courbure de la poutre sur le moule :

$$C_{\text{initiale}} = \frac{1}{R_{\text{moule}} + \frac{n \times e}{2}}$$

Courbure après démoulage ;

$$R = \frac{EI_{\text{plis-collés}}}{M} \Rightarrow C_t = \frac{M}{EI_{\text{plis-collés}}} \quad (1)$$

$$\text{et } M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots$$

Cette méthode cumulative pour le calcul du moment de flexion total  $M$  se résume à un calcul moyen : au lieu de  $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots$  on prendra

$$M = n \times EI_{\text{Pli-individuel}} / \left( R + \frac{n \times e}{2} \right) \text{ ou bien formulé de}$$

cette manière :

$$M = \frac{E \sum I_{\text{Pli-individuel}}}{R_{\text{mouleFN}}}, \text{ avec } R_{\text{mouleFN}} : \text{ rayon du moule à}$$

la fibre neutre des futurs plis contre-collés.

$$\text{Dès lors, si } C_t = \frac{M}{EI_{\text{plis-collés}}} \quad (1)$$

on peut écrire :

$$C_t = \frac{E \sum I_{\text{Pli-individuel}}}{R_{\text{mouleFN}} \times EI_{\text{plis-collés}}} \Rightarrow C_t = \frac{\sum I_{\text{Pli-individuel}}}{R_{\text{mouleRF}} \times I_{\text{plis-collés}}}$$

après avoir éliminé le Module E des équations.

Courbure résultante ;

$$C_{\text{résul tan te.}} = C_{\text{initiale}} - C_t$$

$$\text{et finalement } R = \frac{1}{C_{\text{résul tan te.}}} \text{ après démoulage.}$$

Courbure initiale des plis collés :

$$C_{\text{initiale}} = \frac{1}{R_{\text{moule}} + \frac{n \times e}{2}} \text{ ou } C_{\text{initiale}} = \frac{1}{R_{\text{mouleFN}}}$$

Courbure des plis collés après démoulage :

$$C_t = \frac{\sum I_{Pli-individuel}}{R_{mouleFN} \times I_{plis-collés}}$$

Rayon de courbure espéré à la fibre neutre :

$$C_{résul\ tan\ te.} = C_{initiale} - C_t \Rightarrow R = \frac{1}{C_{résul\ tan\ te.}}$$

On déduit de ces formule ;

$$C_{résul\ tan\ te.} = \frac{1}{R_{mouleFN}} - \frac{\sum I_{Pli-individuel}}{R_{mouleFN} \times I_{plis-collés}}$$

$$C_{résul\ tan\ te.} = \frac{1}{R_{mouleFN}} \left[ 1 - \frac{\sum I_{Pli-individuel}}{I_{plis-collés}} \right]$$

$$R_{mouleFN} = \frac{1}{C_{résul\ tan\ te.}} \left[ 1 - \frac{\sum I_{Pli-individuel}}{I_{plis-collés}} \right]$$

$$\frac{1}{C_{résul\ tan\ te.}} = R_{final} \text{ ou Rayon escompté.}$$

$$R_{mouleFN} = R_{final} \left[ 1 - \frac{\sum I_{Pli-individuel}}{I_{plis-collés}} \right]$$

En reprenant notre exemple du tableau cintré avec 4 plis de 8 mm et d'un rayon intérieur de 3,10 m :

$R_{final} = 3100$  plus la demi-épaisseur du total des 4 plis de 16 mm soit  $3100 + 16 = 3116$

$$\sum I_{Pli-individuel} = 4 \times \frac{8^3}{12} = 170.666$$

$$I_{plis-collés} = \frac{(4 \times 8)^3}{12} = 2730.666$$

$$R_{mouleFN} = 3116 \left[ 1 - \frac{170.666}{2730.666} \right] = 2921$$

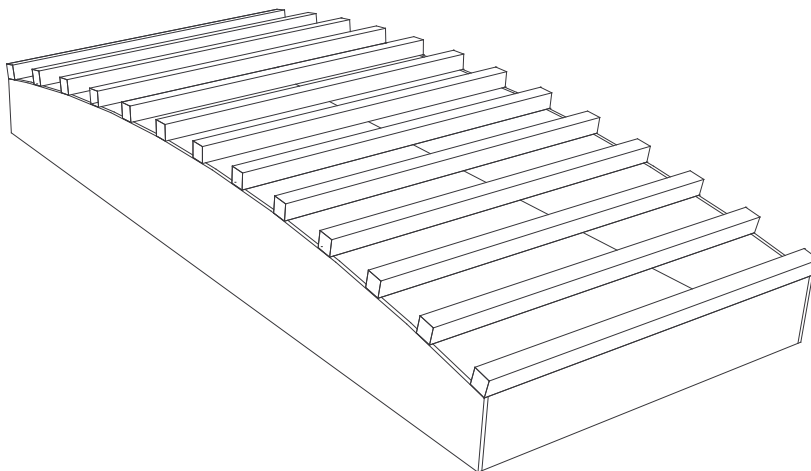
Desquels il faut soustraire la demi-épaisseur du tableau  
 De qui donne  $R_{moule} = 2921 - 16 = 2905 \text{ mm}$

Pour résumer :

$$R_{mouleFN} = R_{final} \left[ 1 - \frac{\frac{n \times e^3}{12}}{\frac{(n \times e)^3}{12}} \right] \text{ ou}$$

$$R_{mouleFN} = R_{final} \left[ 1 - \frac{n \times e^3}{(n \times e)^3} \right]$$

à la fibre neutre des plis collés.



### Que dit la réalité ?

Gilles, qui construit le petit « Gorfou », cintra deux plis de contreplaqué de 5 mm d'épaisseur pour former le dessus du panneau coulissant de descente.

Le rayon de la courbe circulaire correspondant au plan est de 1820 mm mesurés sur le dessous du panneau.

Le calcul, d'après la théorie, précisait de préparer un moule de 1350 mm de rayon.





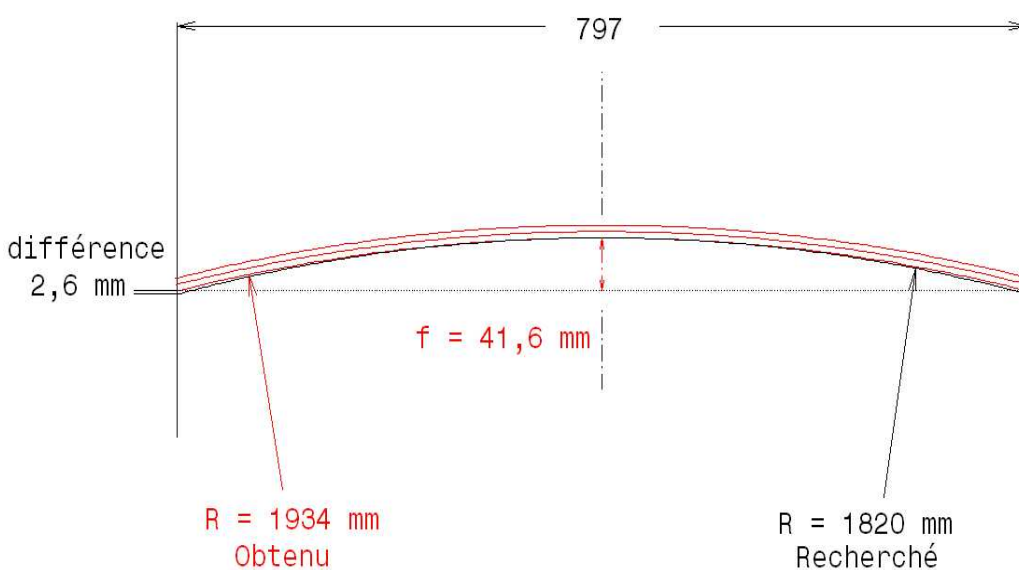
Après 21 heures de polymérisation à chaud de l'époxy, Gilles démoula la pièce :



et prit les mesures de la flèche afin de calculer le rayon de courbure selon la formule ;

$$R = \frac{f}{2} + \frac{C^2}{8f} \text{ ou } R = \frac{4f^2 + C^2}{8f}$$

qui donne un rayon de 1934 mm au lieu des 1820 mm escomptés :



## Analyse

« .... Comme tu dis, les barrots auront facilement raison de la différence, si tu juges utile de rectifier la chose !

Maintenant, d'où vient l'erreur ?

Tu sais que les contraintes de flexion sont toujours accompagnées de contraintes de cisaillement qui influent pour une part minime dans la flèche obtenue, une part si minime qu'on l'ignore pour le bois (mais qui est importante pour les composites avec âme en mousse.) C'est une mesure de simplification, certes, mais qui entre dans l'approximation acceptée quand on travaille sur du bois, matériau qui n'est jamais totalement ho-

mogène.

En principe, une courbure circulaire ne présente aucune contrainte de cisaillement dans la mesure où elle est maintenue entre "4 points". Bien entendu, dans notre cas de figure, les contraintes de cisaillement existent bel et bien, elles maintiennent les plis ensemble dans leur forme imposée.

Les modules d'élasticité "E" en flexion s'annulent dans les calculs de retrait de démoulage, mais pas les modules "G" de cisaillement longitudinal (ou de glissement) qui sont très difficiles à connaître avec précision entre celui de la colle et celui du bois avec les différentes orientations des plis.

Il faut probablement expliquer l'erreur de cette manière.

Franchement, je trouve que le résultat n'est pas si mal et comme tu dis, un petit supplément de contrainte imposée par les barrots comblera aisément la différence.

Normalement les modules d'élasticité en flexion n'entrent pas en ligne de compte mais le module "G" donnera sûrement quelque chose de (peu) différent si on force les panneaux dans le sens perpendiculaire au fil apparent....

Il faut préciser que **deux plis** pour former un bois moulé, constituent le minimum du minimum avec le maximum de retrait de démoulage.

Maintenant comment exploiter les mesures relevées d'après les tests pour perfectionner la théorie ? Il y a là matière à réflexion... »

**Revenons sur terre** et voyons comment corriger l'erreur. Supposons que le panneau tel qu'il existe

maintenant soit posé sur un support central et que l'on appuie sur les deux bords pour obtenir la flèche de 2,6 mm (l'erreur). Quelle serait la force d'appui par bord ? La flèche d'une poutre posée sur deux appuis et chargée ponctuellement en son centre est :

$$f = \frac{PL^3}{48EI}$$

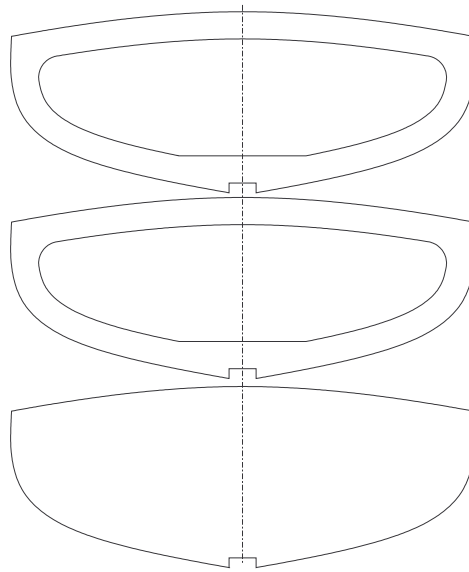
On tire de là  $P = \frac{48.EI.f}{L^3}$  avec ici :  $f = 2,6$  mm,  $L = 797$  mm,  $EI = 562 \times \frac{10^3}{12}$  soit 43833 daN.mm<sup>2</sup> pour 1 mm de largeur.

$P$  est donc égal à 0,0108 daN au centre, soit :  $0,0108 \times 493$  mm (largeur) = 5,327 / 2 = 2,66 daN par côté, environ. Presque rien..

La courbe ne serait plus exactement circulaire mais bien malin celui qui noterait la différence et cela n'a aucune importance pour le panneau coulissant.

## Rebond de démoulage avec des formes prédécoupées développées

La théorie précédente était pensée pour des panneaux rectangulaires ou des pièces de section constante. Maintenant nous devons réfléchir avec des pièces prédécoupées comme par exemple ce tableau arrière du petit « Gorfou » :



Les trois plis sont constitués d'un contreplaqué de 8 mm dont les deux intérieurs sont évidés comme dessiné, afin de former une « ceinture » apte à recevoir le bordé.

Le rayon intérieur après démoulage doit être exactement de 2985 mm. S'il s'agissait de 3 panneaux rectangulaires non évidés, on reprendrait la théorie précédente qui donnerait un rayon du moule de fabrication de 2652 mm. Qu'en est-il de notre tableau ?

Puisque la largeur varie tout le long de la courbure – circulaire –, les moments de flexion varient exactement de manière proportionnelles à la largeur car la raideur  $EI$  se calcule avec  $I$  variable selon la largeur (ou les lar-

geurs) à chaque position (x) de la courbure.

$$EI(x) = \frac{E \times e^3 \times l(x)}{12} \text{ pour chaque pli.}$$

avec  $l(x)$  la largeur du tableau à la position x.

Le moment de flexion en x sera égal à :

$$mf(x) = \frac{EI_1(x)}{R} + \frac{EI_2(x)}{R} + \frac{EI_3(x)}{R} = E(x) \frac{I_1 + I_2 + I_3}{R}$$

Le moment de flexion total varie exactement selon la largeur des plis du tableau en tous points le long de sa courbure, mais le rayon de courbure est constant puisqu'il est imposé par le moule.

Lorsque le tableau sera libéré, les contraintes ajoutées de chaque pli resteront ce qu'elles étaient à l'intérieur du nouveau matériau dans sa nouvelle épaisseur, et les largeurs en tous points (x) restent également les mêmes.

La contrainte interne totale le long de la courbure peut donc s'écrire :

$$mf(x) = \frac{EI_{total}(x)}{R_{démoulé}}$$

Il n'y a donc que le rayon  $R(démoulé)$  qui s'adapte à

l'inertie des trois plis contre-collés  $I = \frac{(3 \times e)^3}{12}$ , les au-

tres valeurs restent inchangées.

La théorie précédente pour des panneaux rectangulaires devait donc se confirmer quelles que soient les formes prédécoupées.

En effet, la pratique a toujours vérifié ce raisonnement avec justesse.



### **Pièces longues, courbure quelconque**

La poutre est composée de  $n$  éléments identiques de section rectangulaire et d'épaisseur  $e$ .

Un des ces éléments opposera une force  $P$  à une sollicitation jusqu'à la flèche  $f$ .

Les  $n$  éléments opposeront la force  $n.P$  pour la même flèche  $f$ .

Après collage, la poutre constituée devra résister à la force  $n.P$  en accusant une flèche  $fr$ , laquelle sera le retrait de démoulage.

Cherchons la relation existante entre  $fr$  et  $f$ , par exemple  $fr / f$ .

La flèche est directement proportionnelle à la charge, et inversement proportionnelle à l'inertie de la section.

La portée et le module d'élasticité étant les mêmes avant et après démoulage.

On peut donc écrire que 
$$\frac{fr}{f} = \frac{n.P}{I_{total}} \times \frac{I_{pli}}{P}$$

$I_{total}$  = inertie de la poutre constituée =  $\frac{(n.e)^3}{12}$  pour

une largeur unité, soit  $\frac{n^3.e^3}{12}$

$I_{pli}$  = inertie d'un élément =  $\frac{e^3}{12}$  pour une largeur unité.

$$\frac{fr}{f} = \frac{n.P}{n^3 e^3 / 12} \times \frac{e^3 / 12}{P}$$

En respectant la proportionnalité, supprimons les termes  $\frac{e^3}{12}$  :

$$\frac{fr}{f} = \frac{n.P}{n^3} \times \frac{1}{P} = \frac{P}{n^2} \times \frac{1}{P} \dots\dots\dots \frac{fr}{f} = \frac{1}{n^2}$$

ou encore  $fr = \frac{f}{n^2}$

$fr$  = flèche de retrait

$f$  = flèche de fabrication, (flèche du moule)

Si  $B$  est la flèche à obtenir après démoulage :

$$B = f - fr \text{ ou } B = f - \frac{f}{n^2}$$

$$B = f \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$f = \frac{B}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

La formule est valable quelle que soit la portée et le genre de contrainte. Le retrait de démoulage ne dé-



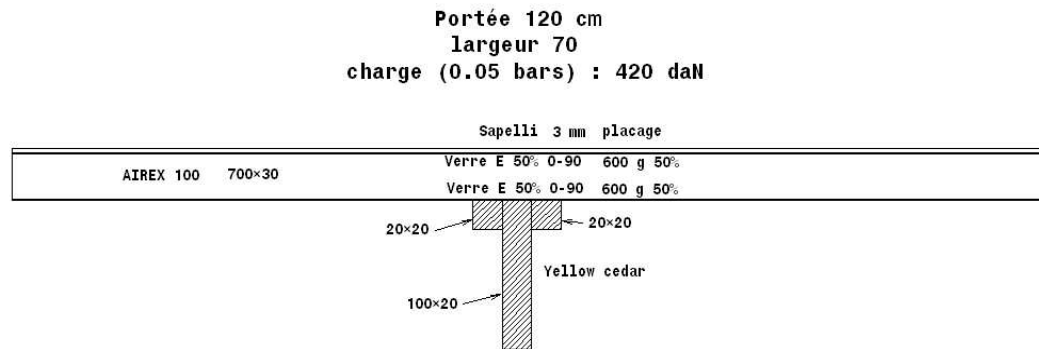
pend que du nombre de plis et reste proportionnel à la flèche de fabrication selon le rapport  $fr = \frac{f}{n^2}$

En principe, la flèche varie légèrement d'un élément à l'autre du fait de la différence de rayon de courbure dans les empilements. Le calcul n'est donc pas totalement exact mais l'erreur est insignifiante pour les pièces lamellées longues, telles que les barrots.

\*

### Éléments simplement superposés

Poser un panneau rigide sur un barrotage demande éventuellement une vérification par un petit calcul de répartition des contraintes selon une flèche donnée entre les deux éléments soumis à des efforts de flexion. La flèche étant supposée la même pour les deux éléments.



Nous avons, par exemple, un panneau de sandwich mousse PVC de 30 mm stratifié de chaque côté par un tissu de verre biaxial à 0-90° et d'un placage de sapelli de 3 mm d'épaisseur dans le sens de sa longueur. La portée est de 120 cm, aidée par un barrot en Yellow Cedar comme indiqué.

On commence par calculer le EI de chaque élément.

## 1 – Panneau :

Elément	cm		° Angle	N/mm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec	CG	I
Verre E 50% 0-90	0,0771	70,0000	0,00	14000	14000	0,0386	0,002673
AIREX 100	3,0000	70,0000	0,00	125	125	1,5771	158
Verre E 50% 0-90	0,0771	70,0000	0,00	14000	14000	3,1157	0,002673
Sapelli	0,3000	70,0000	0,00	13500	13500	3,3042	0,157500

Surface totale 241,794  
 Fibre neutre 2,229  
 Inertie totale 301,204  
 EI haut 39145,216 / 100  
 EI bas 39145,175 / 100  
 EI total 78290,391 / 100  
 Ef résultant 2599 N/mm<sup>2</sup>

## 2 – Barrot :

Elément	cm		° Angle	N/mm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec	CG	I
Yellow cedar	10,0000	2,0000	0,00	9500	8500	5,0000	167
Yellow cedar	2,0000	2,0000	0,00	9500	8500	9,0000	1,333333
Yellow cedar	2,0000	2,0000	0,00	9500	8500	9,0000	1,333333

Surface totale 28,000  
 Fibre neutre 5,730  
 Inertie totale 265,544  
 EI haut 119125,857 / 100  
 EI bas 119125,857 / 100  
 EI total 238251,714 / 100  
 Ef résultant 8972 N/mm<sup>2</sup>

On considère que le panneau subit une pression de 0,05 bars uniformément répartis sur toute la surface, ce qui fait au total :  $0,05 \times 120 \times 70 = 420 \text{ daN}$

La flèche est la même pour les deux éléments, elle sera

$$\text{égale à } f_P = \frac{5P_P l^3}{384EI_P} = f_B = \frac{5P_B l^3}{384EI_B}$$

pour le Panneau et pour le Barrot.

La charge totale est donc répartie entre les deux éléments en fonction de leur module d'élasticité, le plus rigide prendra plus de charge pour lui...

$$\frac{EI_B}{EI_P} = \frac{P_B}{P_P} \text{ ou } \frac{EI_B}{EI_P} = \frac{P - P_P}{P_P} \text{ et } \frac{EI_B}{EI_P} = \frac{P}{P_P} - 1$$

Il vient donc que  $\frac{EI_B}{EI_P} + 1 = \frac{P}{P_P}$

Le rapport des  $EI$  est :  $\frac{23825171}{7929039} = 3$

Soit  $3 + 1 = 4$  et  $P_P = \frac{420}{4} = 105 \text{ daN}$

Le panneau assume  $105 \text{ daN}$  et le barrot le reste, soit  $420 - 105 = 315 \text{ daN}$

Maintenant calculons la flèche en prenant un seul des deux éléments, le panneau :

$$f = \frac{5pl^4}{384EI} \text{ ou } f = \frac{5Pl^3}{384EI} \text{ pour toute la charge}$$

soit  $f = \frac{5 \times 105 \times 120^3}{384 \times 7829039} = 0,30 \text{ cm}$  ou  $3 \text{ mm}$

En prenant maintenant le barrot :

$$f = \frac{5 \times 315 \times 120^3}{384 \times 23825171} = 0,30 \text{ idem comme attendu.}$$

[On peut également procéder de la manière suivante si le nombre d'éléments augmente :

On somme les  $EI$  de chaque élément :  $\sum EI$

La contrainte générale  $P$  se répartira sur chaque élément en fonction de sa raideur  $EI_i$  selon le coefficient

$$\frac{\sum EI}{EI_i} ; \text{ ce qui donne } P_i = P \frac{\sum EI}{EI_i} ]$$

Vérifions les contraintes maxi pour chaque élément.

**Panneau :**

Sapelli : 3.32 N/mm<sup>2</sup> Compression

Verre E 50% 0-90 : 2.55 N/mm<sup>2</sup> Compression

AIREX 100 : 0.04 N/mm<sup>2</sup> Compression

----

AIREX 100 : 0.04 N/mm<sup>2</sup> Traction

Verre E 50% 0-90 : 6.39 N/mm<sup>2</sup> Traction

**Barrot :**

Yellow cedar : 7.50 N/mm<sup>2</sup> Compression

----

Yellow cedar : 10.48 N/mm<sup>2</sup> Traction

\*

### Calculs sur modèles réduits

**N**athanael Herreshoff testait parfois ses gréements de cette manière, en soumettant à la torture des maquettes réalisées à une certaine échelle.

Cette façon de procéder économisait un temps de calcul très significatif, ou bien servait à valider des options nouvelles ( ?) Toujours est-il que la démarche mérite de s'y pencher.

Supposons que la taille réelle soit réduite d'un rapport  $e < 1$

- Une longueur  $l$  deviendra  $l \times e$
- Une aire  $S$  deviendra  $S \times e^2$
- Un volume  $V$  deviendra  $V \times e^3$

- Un moment d'inertie  $I$  deviendra  $I \times e^4$
- Un moment de  $M = F \cdot d$  deviendra  $M \times e^4$

Alors que deviennent les forces réduites à l'échelle de la maquette ?

Essayons la console de nos débuts. Mesures en cm.

Une section rectangulaire de  $5 \times 5$  cm en épicéa porte une charge de 10 daN au bout d'un mètre en porte-à-faux ( $l$ ).

$$I = \frac{5 \times 5^3}{12} = 52,0833 \text{ cm}^4$$

$$E = 1100 \text{ daN / mm}^2 = 110000 \text{ daN / cm}^2$$

$$M = 10 \times 100 = 1000 \text{ daN.cm}$$

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{10 \times 100^3}{3 \times 110000 \times 52,0833} = 0,58182 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{f} = \frac{100}{0,5818} = 171,88$$

$$\sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{10.000 \times 2,5}{52,0833} = 480 \text{ daN / cm}^2 = 4,8 \text{ daN / mm}^2$$

Épicéa :  $R_{\max} = 6 \text{ daN/mm}^2$

Passons sur une maquette au 1/10 ème soit  $e = 0,1$

$$I_m = 52,0833 \times 0,1^4 = 0,00052083 \text{ cm}^4$$

$$l_m = 100 \times 0,1 = 10 \text{ cm}$$

$$v_m = 2,5 \times 0,1 = 0,25 \text{ cm}$$

- Quelle sera la force  $P$  correspondante pour la même flèche proportionnelle  $f_m = 0,1 \times f = 0,05818 \text{ cm}$  ?

$$P_m = \frac{3 \times f_m \times E \times I_m}{l_m^3} = 0,001 daN$$

La force est donc divisée par  $\frac{P}{P_m} = \frac{10}{0,001} = 100$

Il faut donc multiplier la force par  $e^2$  pour la déformation ( $e=1/\text{échelle}$ ).

- Quelle sera la force  $\sigma_m$  correspondante pour la contrainte dans le matériau égale à  $480 daN/cm^2$  ?

$$M_m = \frac{\sigma_m I_m}{v_m} = \frac{480 \times 0,00052083}{0,25} = 0,1 daN.cm$$

[En effet,  $M \times e^4 = 1000 \times 0,1^4 = 0,1$ ]

$$D'où  $P_{mc} = \frac{M_m}{l_m} = \frac{0,1}{10} = 0,01 daN$$$

La force est donc divisée par  $\frac{P}{P_{mc}} = \frac{10}{0,01} = 1000$

Il faut donc multiplier la force par  $e^3$  pour la contrainte

Cherchons une règle générale :

- Pour la déformation :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} \dots\dots\dots P = \frac{3.f.E.I}{l^3}$$

le tout ramené à l'échelle  $e$  :

$$P = \frac{3.f.e.E.I.e^4}{l^3.e^3} = \frac{3.f.E.I.e^5}{l^3.e^3}$$

$$P = \frac{3.f.E.I.e^2}{l^3}$$

la force  $P$  est donc multipliée par  $e^2$

- Pour la contrainte :

$$\sigma = \frac{Plv}{I} \dots\dots\dots P = \frac{\sigma.I}{l.v}$$

le tout ramené à l'échelle  $e$  :

$$P = \frac{\sigma.I.e^4}{l.v.e} = \frac{\sigma.I.e^3}{l.v}$$

la force  $P$  est donc multipliée par  $e^3$

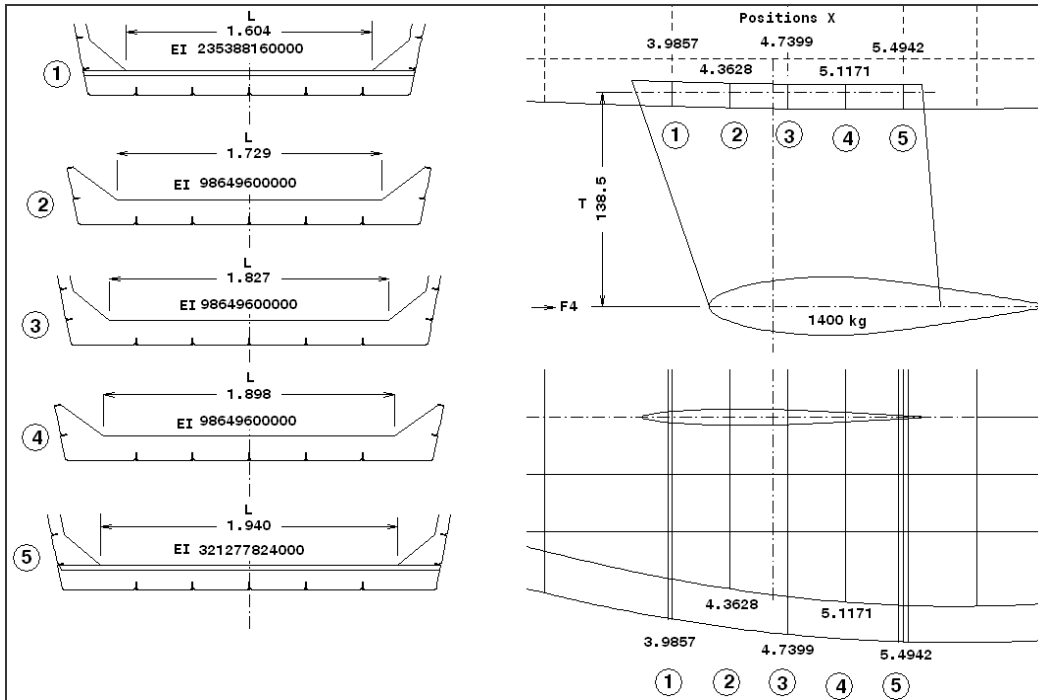
Il devient possible de tester la mécanique d'une maquette soit pour la déformation, soit pour la contrainte.

\*

### Exemple de quille fixée sur 5 varangues

soumises à une force  $F_4$  lors d'un choc ponctuel contre un rocher, pour continuer la discussion évoquée dans le chapitre « hypothèses ».

$T$  représente la distance entre le point d'application de  $F_4$  et le système de varangues de sorte que le moment de rotation  $C$  autour d'un centre à déterminer sera égal =  $F_4 \times T$ , une moitié pour l'avant et une moitié égale pour l'arrière. Soit  $M_{AV} = M_{AR} = F_4 T / 2$



En l'occurrence  $T \times F4 = 4920 \times 138,5 = 681420\text{ kgf.cm}$   
 Le «centre de rotation» est décidé «a priori» entre les extrêmes,  $z = 398,57 + \frac{549,42 - 398,57}{2} = 473,995\text{ cm}$

À partir de l'axe passant par ce centre on devrait calculer un équilibre des moments tel que la somme des moments avant soit égale à la somme des moments arrière, soit  $M_{Av} = M_{Ar} = \frac{681420}{2} = 340710\text{ kgf.cm}$ . Ces

moments dépendent de la réaction de chaque varangue selon sa raideur, sa portée et son cas de chargement (répartie, extrémités encastées, etc).

Une poutre soumise à une certaine charge pendra une flèche, par exemple :

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

pour une charge centrée sur simples appuis,

avec :  $EI$  : raideur de la poutre ; «  $l$  » : sa portée ;



ou  $f = \frac{Pl^3}{192EI}$  pour une charge centrée entre appuis encastrés sur les extrémités.

A l'inverse, et connaissant  $EI$ , on déduit la charge  $P$  à partir de la flèche pour la varangue «  $i$  »

$$P_i = \frac{48EI_i f_i}{l_i^3} \text{ ou } P_i = \frac{192EI_i f_i}{l_i^3} \text{ selon le cas.}$$

Écrivons pour chaque varangue  $P_i = k_i \times f_i$  et pour simplifier.

On connaît  $f_i$  en partant du principe que la quille est infiniment rigide dans le sens longitudinal : imaginons qu'elle «pivote» de la valeur d'un angle  $\theta$ , alors :

$$f_i = d_i \tan \theta \text{ et } P_i = k_i d_i \tan \theta$$

Le moment de  $P_i$  par rapport au centre de rotation (moment = force  $\times$  distance), sera :

$$M_{AV} = \sum k_i d_i \tan \theta \cdot d_i = \sum k_i d_i^2 \tan \theta, \text{ et de même pour}$$

la partie au-delà du centre de rotation :

$$M_{AR} = \sum k_j d_j \tan \theta \cdot d_j = \sum k_j d_j^2 \tan \theta$$

Pour l'équilibre des moments on devrait trouver :

$$\sum M_{AV} = \sum M_{AR} \text{ ou } \sum k_i d_i^2 = \sum k_j d_j^2$$

(en éliminant la constante «  $\tan \theta$  »)

Ce ne sera pas le cas, sauf chance extraordinaire.

**Calcul** de la position du centre de rotation :

Le calcul sera le même que celui déjà abordé au chapitre « Moment de torsion des multicoques » pour la détermination des moments de flexion assumés par chaque poutre de liaison des coques.

Rappel :

$$\sum k_i (d_i + x)^2 = \sum k_j (d_j - x)^2 \dots\dots \text{Développons :}$$

$$\sum (k_i d_i^2 + k_i x^2 + 2k_i d_i x) - \sum (k_j d_j^2 + k_j x^2 - 2k_j d_j x) = 0$$

$$x^2 (\sum k_i - \sum k_j) + 2x (\sum k_i d_i + \sum k_j d_j) + (\sum k_i d_i^2 - \sum k_j d_j^2) = 0$$

Équation du second degré de la forme  $y = ax^2 + bx + c$ .

$A = \sum k_i - \sum k_j$  somme des «  $k$  » avec le signe

$B = 2(\sum k_i d_i + \sum k_j d_j)$  double somme des «  $kd$  », toujours positif.

$C = \sum k_i d_i^2 - \sum k_j d_j^2$  sommes algébrique des «  $k$  » par les carrés des distances données *a priori*.

$$x = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A}$$

Contrainte  $P$  supportée par chaque varangue  $i$  ou  $j$  :

$$M_{AV} = M_{AR} = \sum k_i d_i^2 \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{M_{AV}}{\sum k_i d_i^2}$$

avec  $M_{AV} = M_{AR} = 0,5 \times F_4 T$  :

$$P_i = k_i d_i \tan \theta = 0,5 \times F_4 T \times \frac{k_i d_i}{\sum k_i d_i^2} \text{ et ainsi de suite pour}$$

$i_1, i_2, i_3, \dots$  Puis

Dans notre exemple :

$$\sum k_i d_i^2 = 307530239 \text{ ce qui amène :}$$

$$P_1 = 340710 \times \frac{4042731}{307530239} = 4479 \text{ kgf}$$

$$P_2 = 340710 \times \frac{633012}{307530239} = 701 \text{ kgf}$$

$$\sum k_j d_j^2 = 307532158, \text{ donc :}$$

$$P_3 = 340710 \times \frac{73494}{307532158} = 81 \text{ kgf}$$

$$P_4 = 340710 \times \frac{609776}{307532158} = 676 \text{ kgf}$$

$$P_5 = 340710 \times \frac{3519012}{307532158} = 3899 \text{ kgf}$$

Une fois ces calculs réalisés, on peut vérifier à partir du « centre de rotation » que :  $\sum P_i d_i = \sum P_j d_j$

Ensuite on vérifie que chaque varangue<sub>i</sub> est capable d'assumer sa contrainte  $P_i$ .

Voir le tableau Excel page suivante.

CALCUL DES FORCES APPLIQUÉES SUR LES VARANGUES EN CAS DE CHOC LONGITUDINAL (F4)

Lancer le calcul : CTRL B

Varangue N°	cm	cm	cm	cm <sup>4</sup>	k	d avant	d arrière	kd	kd <sup>2</sup>	Force kgf
1	160,4	398,57	2,35388E+11	57038,95	70,87667276	4042730,994	286535321,7	4479		
2	172,9	436,28	98649600000	19085,79913	33,16667276	633012,4542	20994916,92	701		
3	182,7	473,99	98649600000	16176,3184	4,543327242	73494,30806	333908,6919	81		
4	189,8	511,71	98649600000	14428,01896	42,26332724	609776,0868	25771166,3	676		
5	194	549,42	3,21278E+11	44002,31846	79,97332724	3519011,814	281427083,4	3899		
6										
7										
8										
					$\Sigma k$ avant - $\Sigma k$ arrière	$2\Sigma kd$	$\Sigma kd^2$ av - $\Sigma kd^2$ ar			
					1518,093312	9351740,456	-1919,738929			
					A	B	C			

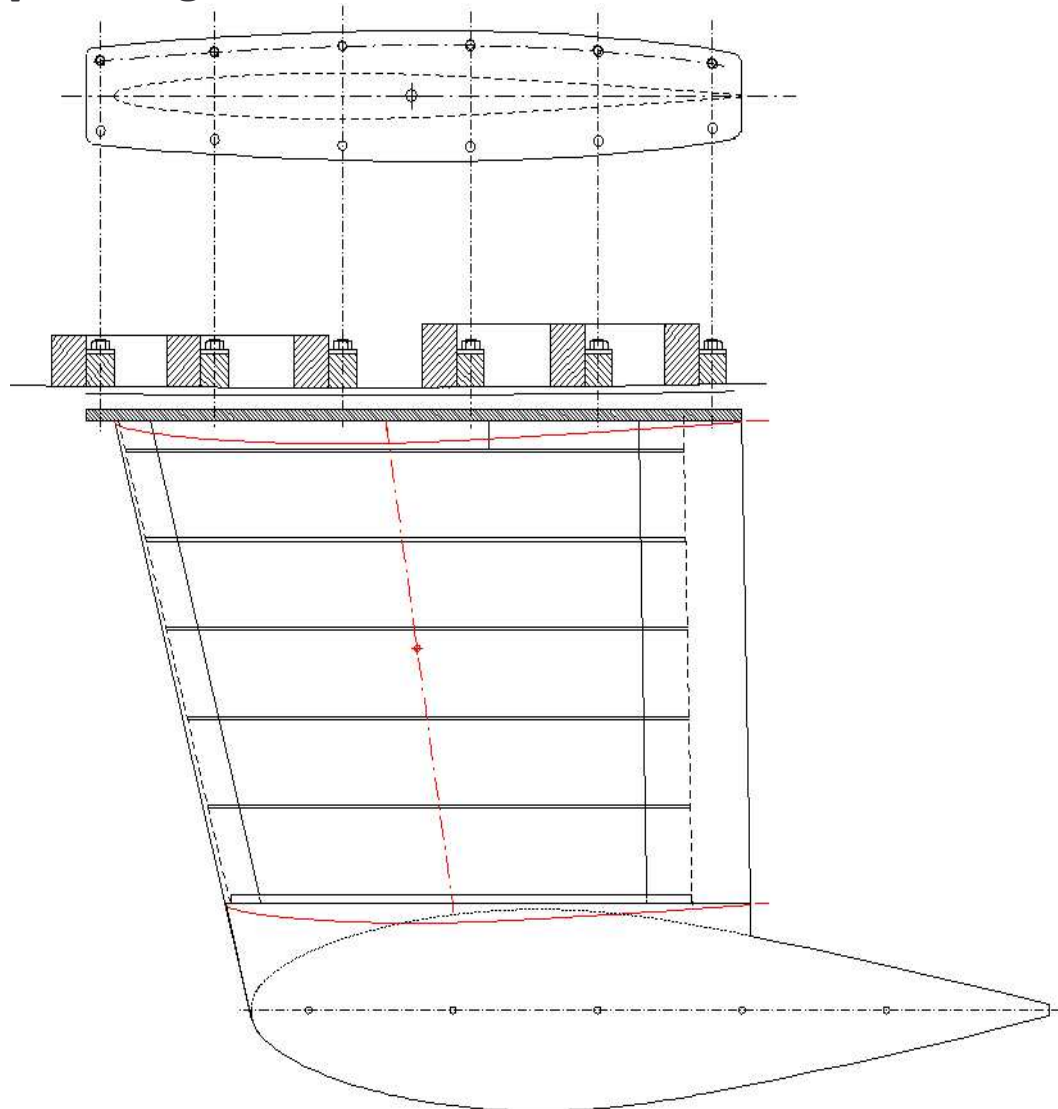
Moment (F4 \* h du lest sous coque)  
en kgf,cm

Décalage x	0,000205281
Centre de rotation	469,4
Moment avant	340710
Moment arrière	340710
Moment total	681420

case "E" :  
Avec les extrémités appuyées..... 48EI  
Avec les extrémités encastées.....192EI  
k = EI / L3

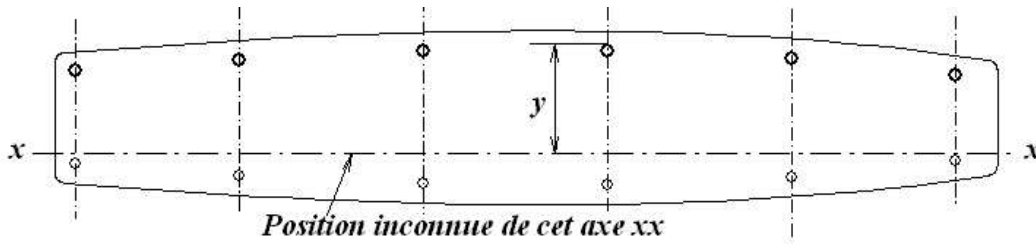
## Exemple de calcul des boulons de quille

Dans le cas d'une fixation par l'intermédiaire d'une platine rigide :

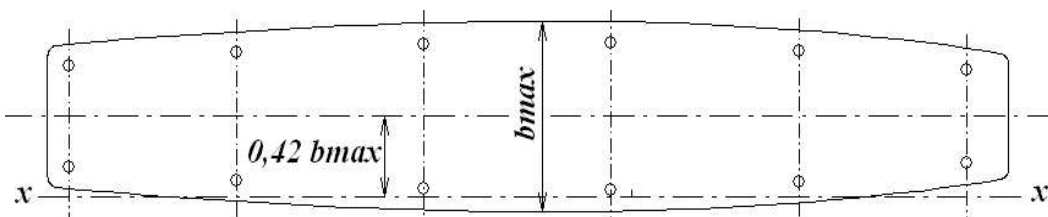


*Le lest du « B13-50 »*

La quille est fixée sur le fond du navire par des boulons en inox 316 L qui travaillent en traction par rapport à un axe xx dont la position est a priori inconnue.



Selon la norme internationale ISO/FDIS 12215-9 en date du 8 février 2012, le problème doit être pris de cette manière :



Une ligne de pivotement xx est positionnée comme indiqué, à 42% de la largeur maxi  $b_{max}$  de la platine rigide depuis l'axe de symétrie.

*(Je ne m'explique pas bien cette approche de positionnement de « l'axe de pivotement ». Mais je reste dans mes habitudes de ne rien rejeter a priori et de chercher à comprendre et développer les formules qui me sont proposées.)*

Tous les boulons au dessus de cette ligne sont à prendre en compte pour le calcul de leur diamètre.

À partir de là, lorsque tous les boulons sont tous choisis de même diamètre, celui-ci est donné par la formule :

$$d_{neck} = \sqrt{\frac{1273 \times b_{i_{max}} \times C}{\sigma_{bold} \times \sum b_i^2}}$$

- $b_{i\max}$  est la distance en mm de l'axe du boulon le plus éloigné de xx
- C est le moment en N.m à prendre en compte, vu dans le chapitre « hypothèses »
- $\sum b_i^2$  est la somme des carrés des distances en mm<sup>4</sup> de chaque axe des boulons au dessus de xx. Je suppose qu'il s'agit de théorème de Steiner  $I_{axe} = I_{cg} + sd^2$  formule dans laquelle  $I_{cg}$  est négligeable comparé à  $sd^2$  ....
- $\sigma d_{bold}$  est la contrainte de conception admissible pour le matériau utilisé. (Inox 316L : 195 N/mm<sup>2</sup>)
- 1273 est un chiffre mystérieux que nous allons démêler.

À partir de ces principes, le couple C est assumé par chaque boulon en fonction de sa distance de l'axe xx. Si tous les boulons sont de même diamètre alors leur surface « s » est identique. La somme des inerties des surfaces des sections à fond de filet sera approximativement égale à  $\sum sb_i^2$  ou  $s \sum b_i^2$  et la contrainte maximale sur le boulon le plus éloigné sera environ égal à :

$$\sigma_{\max} \approx C \frac{b_{i\max}}{s \sum b_i^2}$$

On impose la valeur de  $\sigma d_{bold}$  à  $\sigma_{\max}$ , donc :

$$s \approx C \frac{b_{i\max}}{\sigma d_{bold} \sum b_i^2}$$

L'aire s de la section du boulon =  $\pi R^2$  ou  $\pi \frac{d^2}{4}$

$$\text{D'où } C \frac{b_{i \max}}{\sigma d_{bold} \sum b_i^2} = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$C \frac{4 \times b_{i \max}}{\pi \times \sigma d_{bold} \sum b_i^2} = d^2 \Rightarrow C \frac{1,273 \times b_{i \max}}{\sigma d_{bold} \sum b_i^2}$$

Le moment C est utilisé en N.m alors que  $\sigma d_{bold}$  est pris en N/mm<sup>2</sup>. Pour la cohérence, on doit multiplier l'équation par 1000 :

$$d^2 = C \frac{1273 \times b_{i \max}}{\sigma d_{bold} \sum b_i^2} \text{ et } d = \sqrt{C \frac{1273 \times b_{i \max}}{\sigma d_{bold} \sum b_i^2}}$$

Le fait de comprendre de quoi il s'agit donne quelque chose en soi de satisfaisant...

Maintenant nous voyons quelle fut la démarche du rédacteur de la norme et nous pouvons calculer le diamètre des boulons avec cette méthode pour l'exemple qui nous occupe.

Couple maxi en flexion C :

$$34010 \text{ N} \times 1,427 \text{ m} = 48532 \text{ N.m}$$

$$\sum b_i^2 = 402479 \text{ mm}^4$$

$$b_{\max} = 276,4 \text{ mm}$$

Le diamètre des boulons sera donc :

$$d = \sqrt{\frac{48532 \times 1273 \times 276,40}{195 \times 402479}} = 14,75 \text{ mm} \text{ à fond de filet.}$$

On prendra un diamètre de 20 mm standard avec un diamètre à fond de filet de 16,93 mm.

\*

Bien entendu cela ouvre une discussion au sujet de la



position de « l'axe de pivotement. Dans le cas retenu par les normes, l'appui sur le fond de la coque est considéré comme constitué d'un matériau d'une raideur quasi infinie, ce qui n'est pas le cas, certainement pas avec le bois, loin s'en faut.

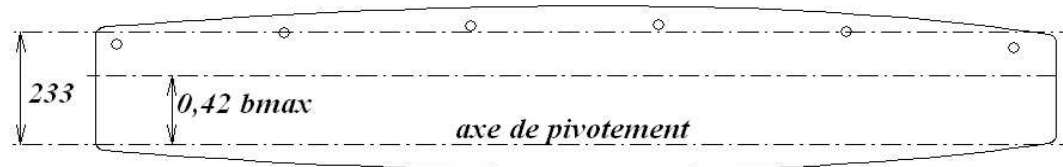
Le principe utilisé par les normes suppose donc que le moment  $C$  s'appuie sur une « ligne de pivotement »  $xx$ . Essayons de calculer quelle force d'appui sera appliquée sur  $xx$ .

Nous savons que le moment  $C = Pl$  doit être équilibré par un moment égal à  $R.a$ , sachant que  $a = \frac{I}{m}$ ,

$$m \text{ étant le moment } s \sum b_i \text{ d'où } a = \frac{s \sum b_i^2}{s \sum b_i} = \frac{\sum b_i^2}{\sum b_i}$$

Ce qui donne dans notre exemple :

$$a = \frac{402479.18}{1728} = 233mm$$



et qui permet de calculer :

$$R = \frac{C}{a} = \frac{48532000 N.mm}{233mm} = 208291 \text{ Newtons}$$

ce qui revient à dire que la force de réaction  $R$  appliquée sur la « ligne de pivotement » se monte à 21232 kgf

Répartis sur une longueur de 1900 mm :

$$\frac{21232}{1900} = 11,17 \text{ kgf / mm linéairement... ( ? )}$$

Il est évident que le Yellow Cedar ne résisterait jamais à un tel traitement en compression en travers de ses fibres.

La démarche utilisée par les normes donne directement un diamètre de boulon à fond de filet. Partant de ce principe, il devient obligatoire de positionner l'axe *xx*. Le critère que je trouve discutable (42%..) ne tient aucunement compte du matériau sur lequel la platine s'appuie.

\*

Revoyons les choses autrement pour voir.

On peut estimer que la partie traction est assumée par les boulons et la partie compression est assumée par l'appui sur le matériau du fond de la coque, en l'occurrence il s'agit dans cet exemple de «Yellow Cedar ».

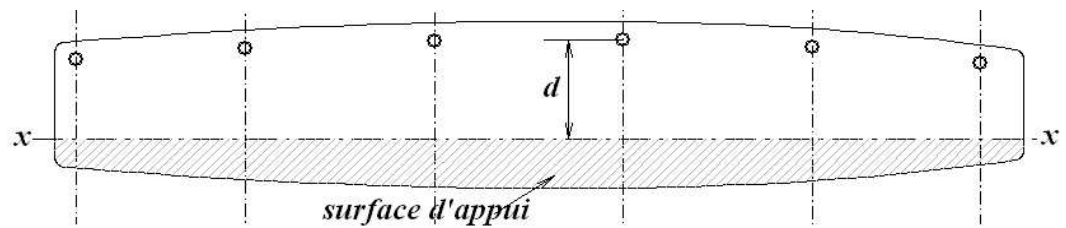
On se retrouve donc avec notre problème habituel, à savoir où se situe l'axe *xx*, base de calcul pour la répartition des contraintes.

Partons encore une fois du principe qui consiste à dire que les raideurs « *EI* » doivent être également réparties en traction et en compression, soit :

$$EI_t = EI_c$$

Les modules sont connus, pour l'inox  $2 \times 10^6 \text{ daN/cm}^2$  et pour le Yellow Cedar en travers de fil, on estimera que le module en compression sera de  $0,012 \times 10^6$

$daN/cm^2$  – pas grand-chose –, ce qui serait une hypothèse à vérifier mais admettons pour notre exemple. A partir d'une position « a priori » de l'axe de référence  $xx$ , on effectuera en traction la somme des  $EI$  de chaque boulons et en compression le produit de l'inertie de la surface d'appui par le module  $E$  du Yellow Cedar.



Pour les boulons, on prendra une section « à fond de filet » estimée a priori. Le calcul de l'inertie par rapport à son centre de gravité sera  $I_{CG} = \frac{\pi D^4}{64}$ . Ensuite on calculera la somme des produits de  $I_{CG} + Sd^2$  selon le théorème de Steiner,

$$\text{soit } EI_{\text{boulons}} = 2 \times 10^6 daN / cm^2 \sum \left[ \frac{\pi D_i^4}{64} + S_i d_i^2 \right] \text{ par rap-}$$

port à  $xx$ .

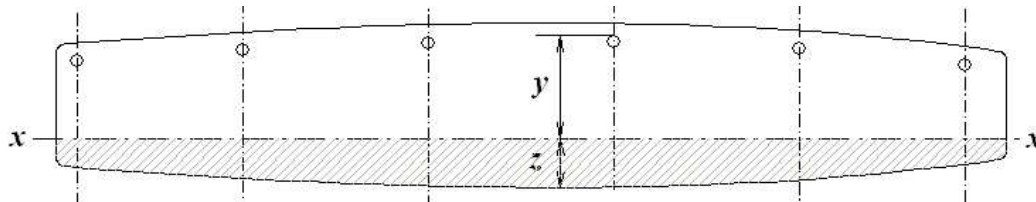
L'axe  $xx$  détermine la surface d'appui sur le Yellow Cedar et donc le  $EI_{\text{YellowCedar}} = I \times 0,012 \times 10^6 daN / cm^2$

Refaire le calcul tant que l'égalité  $EI_t = EI_c$  n'est pas atteinte....

Cette manière de procéder est assez fréquente. Il s'agit d'estimer un échantillonnage a priori et ensuite de vérifier par le calcul si le choix convient ou s'il faut le rectifier pour bien faire. On travaille donc dans ce cas par tâtonnements ou par « essais et erreurs ».

tâtonnements ou par « essais et erreurs ».

Lorsque que l'approche sera satisfaisante, on calculera les contraintes maxi, sur l'inox des boulons, en considérant la fibre du boulon la plus éloignée de l'axe xx à la distance « y » définie comme sur ce croquis :



Contrainte max sur l'inox des boulons :

$$\sigma_{\text{boulon}} = C \times \frac{y \times E_{\text{boulons}}}{EI_t + EI_c}$$

Contrainte max sur le Yellow Cedar :

$$\sigma_{\text{YellowCedar}} = C \times \frac{z \times E_{\text{YellowCedar}}}{EI_t + EI_c}$$

La valeur des contraintes devra être acceptable compte tenu des coefficients de sécurité....

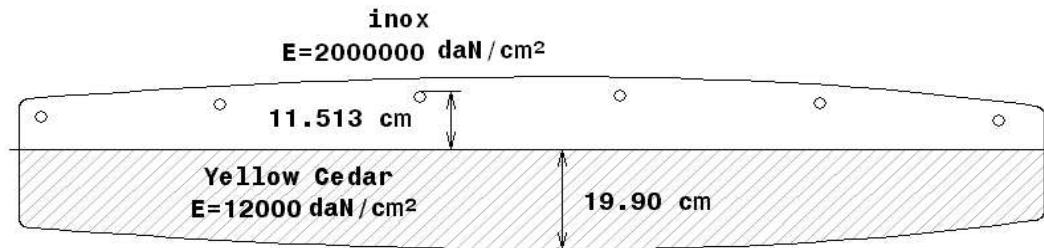
Voyons l'exemple chiffré en prenant le cm comme unité de base.

Mes boulons sont choisis avec un  $\varnothing$  de 30 mm ou 25,7 mm à fond de filet.

Couple maxi en flexion :

$$3401 \text{ daN} \times 142,7 \text{ cm} = 485322 \text{ daN.cm}$$

Après quelques tâtonnements, l'axe neutre se situe tel que dessiné ci-dessous :



- L'inertie totale des boulons à fond de filet par rapport à l'axe neutre =  $2327 \text{ cm}^4$

$$\text{et } EI_{\text{Boulons}} = 2327 \times 2 \times 10^6 = 4655 \times 10^6$$

- L'inertie du Yellow Cedar en compression par rapport à l'axe neutre =  $387931 \text{ cm}^4$

$$\text{et } EI_{\text{YellowCedar}} = 387931 \times 0,012 \times 10^6 = 4655 \times 10^6$$

On considère que l'égalité des  $EI$  est respectée.

$$\text{Total des } EI = 9310 \times 10^6$$

- Distance maxi de l'inox du boulon le plus éloigné de l'axe  $xx$  :  $11,513 \text{ cm}$

$$\sigma_{\text{Boulons}} = \frac{485322 \times 11,74 \times 2 \times 10^6}{9310 \times 10^6} = 1224 \text{ daN / cm}^2$$

soit 122 N/mm<sup>2</sup>. (La limite étant 195 N/mm<sup>2</sup>)

- Distance maxi de la fibre de Yellow Cedar la plus éloignée de  $xx$  :  $19,87 \text{ cm}$

$$\sigma_{\text{YellowCedar}} = \frac{485322 \times 19,90 \times 0,012 \times 10^6}{9310 \times 10^6} = 12,43 \text{ daN / cm}^2$$

soit 1,24 N/mm<sup>2</sup> (limite admise 3-4 N/mm<sup>2</sup>)

On pourrait éventuellement revoir le diamètre des boulons à la baisse ce qui changerait la répartition sur le bois...

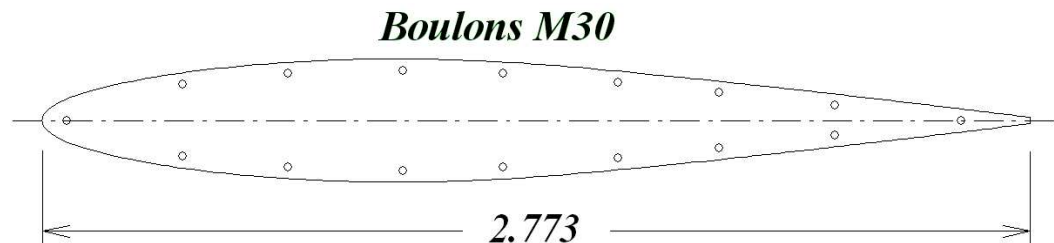
Pour achever cette étude comparative prenons les boulons proposés par les normes, soit un diamètre

standard de 20 mm et 16,93 mm à fond de filet.  
La contrainte sur les boulons serait de  $209,2 \text{ N/mm}^2$   
(limite admise  $195 \text{ N/mm}^2$ )

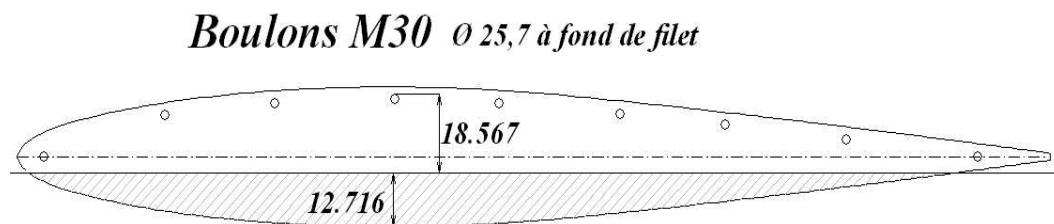
La contrainte de compression sur le bois serait de  
 $1,62 \text{ N/mm}^2$ .  
(limite admise  $3-4 \text{ N/mm}^2$ )



**Autre exemple** d'une quille en plomb allié avec 4% d'antimoine sans platine de fixation fixée sous la coque à l'aide de boulons M30 de 25,7 mm de  $\varnothing$  à fond de filet.



L'aide d'un logiciel adapté donne avec précision ces chiffres en tenant compte des trous des boulons pour la partie « plomb ».



- pour les boulons en inox d'un module de  $2 \times 10^6$  N/cm<sup>2</sup> :

$$EI = 7492 \text{ cm}^4 \times 2 \times 10^6 \text{ daN / cm}^2 = 14984 \times 10^6$$

- avec un module de 2100 daN/cm<sup>2</sup> pour la partie en plomb, ou  $0,21 \times 10^6$  daN / cm<sup>2</sup> :

$$EI = 71345 \text{ cm}^4 \times 0,21 \times 10^6 \text{ daN / cm}^2 = 14982 \times 10^6$$

Les  $EI$  sont sensiblement égaux en traction sur les boulons et en compression sur l'alliage de plomb. On considère que le fond de la coque est plus résistant que le plomb ; ce dernier risque donc de céder en

premier en dépassant sa limite élastique par la compression avant le fond du bordé de coque, en estimant que la charge soit uniformément répartie sur le bordé de coque.

Cette position de la « fibre neutre » permet de calculer les taux de contrainte pour les 2 matériaux impliqués.

La somme des  $EI$  est égale à  $29970 \times 10^6$

Supposons un couple de :

$$6500kg \times 240cm \times 0,981 = 1530360daN.cm$$

Contraintes ;

Inox :

$$\frac{1530360daN.cm \times 2 \times 10^6 \times 18,567cm}{29970 \times 10^6} = 1886daN / cm^2$$

Soit 189,6 N/mm<sup>2</sup> ..... presque limite pour un maxi à 195. On peut souhaiter un coefficient de sécurité supérieur.

Plomb :

$$\frac{1530360daN.cm \times 0,21 \times 10^6 \times 12,716cm}{29970 \times 10^6} = 136,36daN / cm^2$$

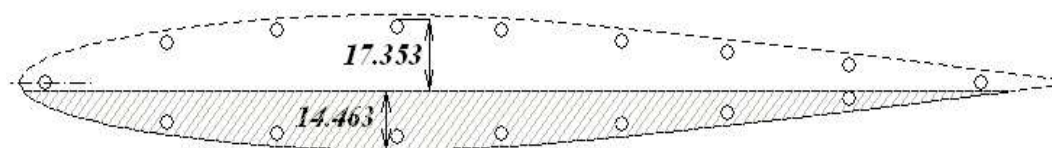
Soit 13,4 N/mm<sup>2</sup>

Pour une limite à 40 N/mm c'est Ok.

Voyons tout de même ce que donnerait des boulons M42 avec un  $\emptyset$  à fond de filet de 36,5 mm..



### *Boulons M42 Ø 36,5 à fond de filet*



L'aide du logiciel donne encore avec précision ces chiffres, toujours en tenant compte des trous des boulons pour la partie « plomb ».

Calculs des  $EI$  :

- pour les boulons

$$EI = 11517 \text{ cm}^4 \times 2 \times 10^6 \text{ N / cm}^2 = 23034 \times 10^6$$

- pour le plomb :

$$EI = 109672 \text{ cm}^4 \times 0,21 \times 10^6 \text{ N / cm}^2 = 23031 \times 10^6$$

Cumul des deux :  $46064 \times 10^6$

Les contraintes donnent :

- Inox :

$$\frac{1530360 \text{ daN.cm} \times 2 \times 10^6 \times 17,353 \text{ cm}}{46064 \times 10^6} = 1153 \text{ daN / cm}^2$$

Soit 115,3 N/mm<sup>2</sup> .....

- Plomb ;

$$\frac{1530360 \text{ daN.cm} \times 0,21 \times 10^6 \times 14,463 \text{ cm}}{46064 \times 10^6} = 100,9 \text{ daN / cm}^2$$

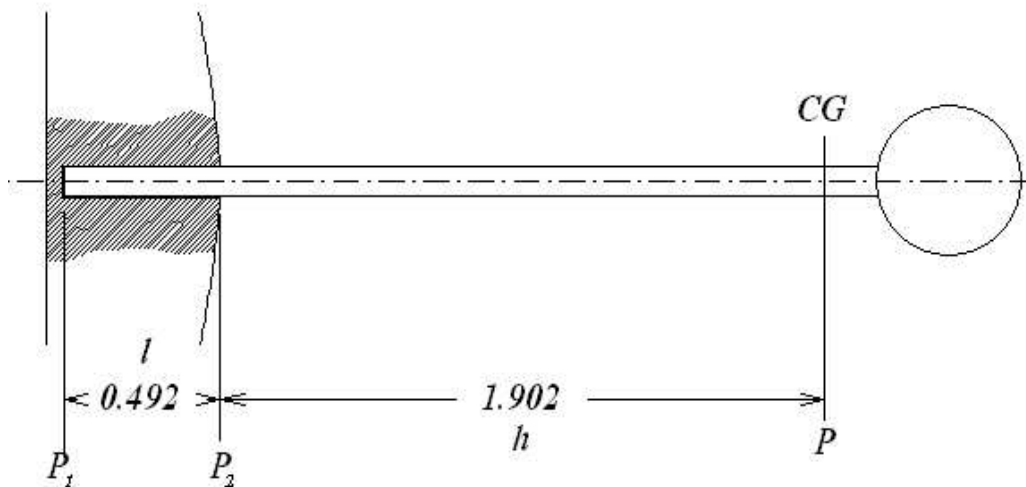
Soit 10,1 N/mm<sup>2</sup> ..... OK

L'alliage de plomb à 4% d'antimoine ne risque pas de

s'écraser.

Des boulons de diamètres plus importants font décaler la fibre neutre de telle manière que la surface de la partie « plomb » et donc son inertie augmentent. Cela fait diminuer la contrainte sur le plomb, elle passe de 13,4 à 10,1 N/mm<sup>2</sup>.

Voilà donc une manière de résoudre ces problèmes, quoique ce montage ne soit plus d'actualité. On préfère aujourd'hui concentrer le plomb dans un bulbe le plus bas possible. Le « voile de quille » est dès lors constitué de métal creux (ou plein !) ou d'un composite à base de fibres de carbone. Dans ce dernier cas la fixation sera plus facilement encastrée dans la coque à l'intérieur d'une « boîte » :



L'équilibre des moments permet de déduire les forces  $P_1$  et  $P_2$  de la manière suivante avec  $P = 1000$  kg :

$$P_1 = \frac{Ph}{l} \text{ et } P_2 = P_1 + P, \text{ chiffré cela donne :}$$

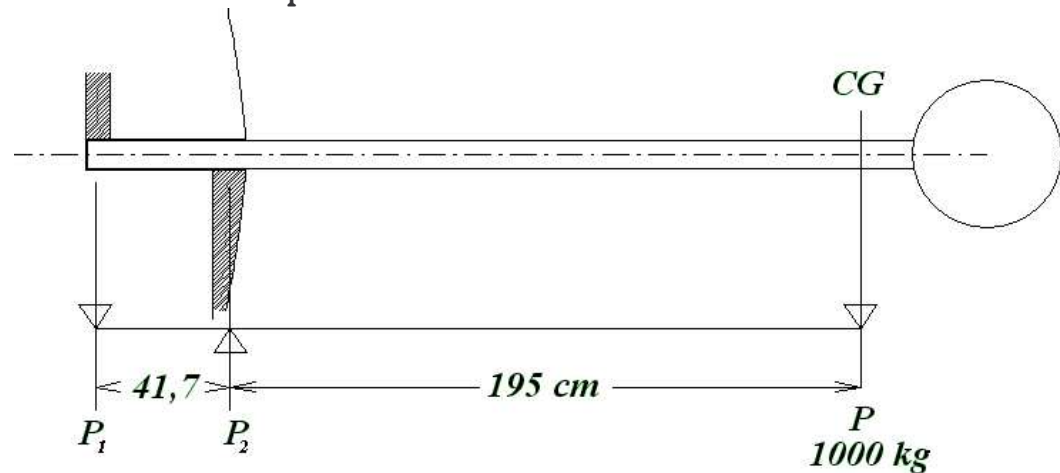
$$P_1 = 3866 \text{ kgf} \dots\dots\dots P_2 = 4866 \text{ kgf}$$

Mais en calculant ainsi, on estime que les choses se présentent de cette manière pas forcément très réaliste,



avec des appuis ponctuels très théoriques car les appuis présentent obligatoirement une certaine surface qui réduit la longueur du bras de levier résistant et augmente celle du bras de levier agissant.

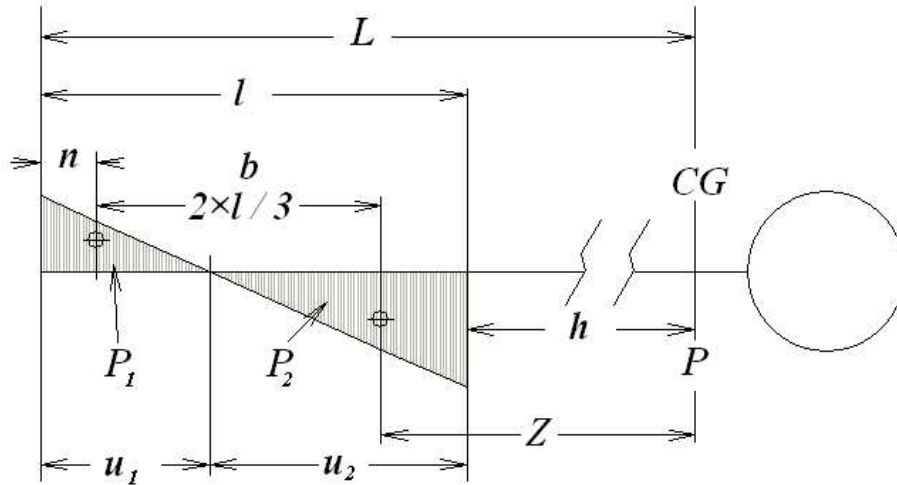
La réalité sera probablement ainsi avec des « points durs » dans le puits :



$P_1 = 4676\text{ kgf}$  .....  $P_2 = 5676\text{ kgf}$  en prenant comme position des points d'appui une moyenne de leur dimension.

Supposons maintenant que la « boîte » soit constituée d'un matériau homogène avec son module d'élasticité également réparti partout et que la quille soit entièrement collée sur toute la hauteur «  $l$  » en prise.

Supposons encore que la partie encastrée de la quille sur la longueur «  $l$  » soit infiniment rigide.... Voilà une autre hypothèse de travail. Essayons de voir ce que donne ce cas d'école :



Les forces d'appui sont censées se répartir triangulairement comme dessinées si la partie encastrée «  $l$  » est effectivement infiniment rigide.

Le moment de flexion ne sera plus égal à  $P \times h$  mais  $P \times Z$ , c'est-à-dire que le point central de la « balance romaine » sera le centre de gravité des forces d'appui, à  $1/3$  de la mesure de  $u_2$ .

Les surfaces des triangles représentent les forces en

jeu :  $P_1 = \frac{PZ}{b}$  et  $P_2 = P_1 + P$

On ne connaît pas la dimension du bras de levier «  $Z$  » qui détermine la valeur de  $P_1$  et donc celle de  $P_2$ . En

revanche le rapport  $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2$  sera égal au rapport  $\frac{P_2}{P_1}$ .

Nous avons donc deux manières de calculer la valeur

$$\text{de } P_2 : P_2 = P_1 + P \quad \text{et} \quad P_2 = P_1 \times \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 ;$$

les deux manières doivent donner le même résultat.

On cherche par exemple, la valeur de  $n$  avec les données que nous avons ;  $P$  ;  $h$  ;  $l$

$$\text{Sachant que } u_1 = 3n, \text{ alors } k = \left( \frac{l - 3n}{3n} \right)^2$$

$$\text{Soit } \left( \frac{l - 3n}{3n} \right)^2 = \left( \frac{l}{3n} - 1 \right)^2 \text{ et } k = \frac{l^2}{9n^2} - \frac{2l}{3n} + 1$$

$$\text{Selon le graphique : } Z = h - n + \frac{l}{3}$$

$$P_1 = \frac{PZ}{2l/3} = \frac{3PZ}{2l}$$

$$P_2 = P_1 + P = \frac{3PZ}{2l} + P = P \left( \frac{3Z}{2l} + 1 \right)$$

$$P_2 = P_1 \times k$$

Nous avons donc :

$$P_2 = P \left( \frac{3Z}{2l} + 1 \right) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{3PZ}{2l} \times k \quad \text{donc ;}$$

$$P \left( \frac{3Z}{2l} + 1 \right) = \frac{3PZ}{2l} \times k$$

divisons tout par  $P$  :

$$\frac{3Z}{2l} + 1 = \frac{3Z}{2l} \times k$$

factorisation par  $\frac{3Z}{2l}$

$$\frac{3Z}{2l} \left( 1 + \frac{2l}{3Z} \right) = \frac{3Z}{2l} \times k \Rightarrow 1 + \frac{2l}{3Z} = k$$

$$1 + \frac{2l}{3Z} = \frac{l^2}{9n^2} - \frac{2l}{3n} + 1 \quad k \text{ est remplacé par sa valeur}$$

$$\frac{2l}{3Z} = \frac{l^2}{9n^2} - \frac{2l}{3n} \Rightarrow \frac{2l}{Z} = \frac{l^2}{3n^2} - \frac{2l}{n} \Rightarrow \frac{2}{Z} = \frac{l}{3n^2} - \frac{2}{n}$$

multiplication par  $n^2$  :

$$\frac{2n^2}{Z} = \frac{l}{3} - 2n \quad \text{et} \quad 2n^2 = Z \left( \frac{l}{3} - 2n \right)$$

comme  $Z = h - n + \frac{l}{3}$  alors :

$$2n^2 = \left( \frac{l}{3} - 2n \right) \left( h - n + \frac{l}{3} \right)$$

développons :

$$2n^2 = \frac{lh}{3} - \frac{nl}{3} + \frac{l^2}{9} - 2nh + 2n^2 - \frac{2nl}{3}$$

$$0 = \frac{l}{3} \left( h - n + \frac{l}{3} - 2n \right) - 2nh$$

$$0 = \frac{l}{3} \left( h + \frac{l}{3} - 3n - 2nh \times \frac{3}{l} \right)$$

$$0 = \frac{l}{3} \left( h + \frac{l}{3} - 3n - \frac{6nh}{l} \right) \quad \text{on divise par } \frac{l}{3}$$

$$0 = h + \frac{l}{3} - 3n - \frac{6nh}{l}$$

$$3n + \frac{6nh}{l} = h + \frac{l}{3} \Rightarrow \frac{3nl + 6nh}{l} = h + \frac{l}{3}$$

$$3nl + 6nh = l \left( h + \frac{l}{3} \right)$$

$$n(3l + 6h) = l \left( h + \frac{l}{3} \right)$$

$$n = \frac{l \left( h + \frac{l}{3} \right)}{3l + 6h} \quad (1)$$

De là, on tire :  $Z = h - n + \frac{l}{3}$

Et les valeurs de  $P_1$  et de  $P_2$

Reprenant notre exemple ci-dessus avec

$$h = 1.902m$$

$$l = 0.492m \text{ et } P = 1000 \text{ kg}$$

l'équation (1) donne  $n = 0,0788685$  ;

$$P_1 = 6058,32425 \text{ kgf} ; P_2 = 7058,32425 \text{ kgf}$$

$P_2$  est bien égal à  $P_1 + P$

$$u_1 = 3n = 0,2366097 ;$$

$$u_2 = l - u_1 = 0,492 - 0,2366097 = 0,2553903$$

$$\left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 = \left( \frac{0,2553903}{0,2366097} \right)^2 = 1,165048$$

$P_2 = 6058 \times 1,165048 = 7058$  ce qui vérifie ce qui doit l'être.

La hauteur du triangle  $P_2$  donne la contrainte maxi à répartir sur la largeur du voile de quille :

$$P_2 = 7058 \text{ kgf sur } 255 \text{ mm de base } (u_2).$$

$$\text{Hauteur : } h = \frac{7058 \times 2}{255} = 55,35 \text{ kgf à étaler sur la lar-}$$

geur du voile de quille, disons 600 mm :

Contrainte par max :  $55,35 / 600 = 0,09 \text{ kgf/mm}^2$  ou  $0,88 \text{ N/mm}^2$ . Contrainte assez minime en rapport avec les surfaces exposées. Mais les contraintes, si elles sont

mieux réparties, sont plus importantes à prévoir concernant la structure intérieure du navire, elles doivent être reprises efficacement autour de la « boîte » par de solides varangues.

La question du choc longitudinal contre un caillou avec 1,2 g de décélération reste aussi à vérifier ...

Note :

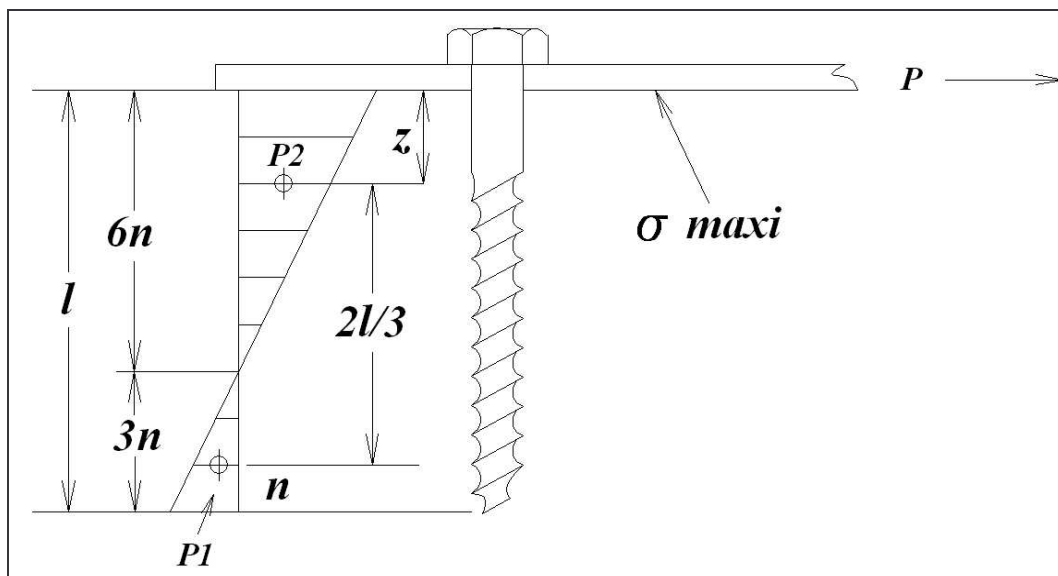
On peut utiliser cette formule pour le calcul des tire-fonds. Chapitre suivant.

\*

### Les Tire-fonds

Travaillant en cisaillement

Par mesure de simplification, on considère que le tire-fond est infiniment rigide et que son diamètre reste constant sur toute sa longueur. Le tire-fond est vissé dans le bois avec la fibre orientée dans le sens des efforts. Le montage est, par exemple, celui de la fixation des cadènes.





Nous avons cette formule  $n = \frac{l \left( h + \frac{l}{3} \right)}{3l + 6h}$  au chapitre précédent, lorsqu'il existait un porte-à faux  $h$  ; cela ne sera quasiment pas le cas concernant le tire-fond qui nous occupe. On considère  $h$  d'une dimension non significative soit  $h = 0$  :

ce qui donne  $n = \frac{l^2}{3l}$  ou encore  $n = \frac{l}{9}$

$$P_1 = \frac{PZ}{2l/3} = \frac{3PZ}{2l} \text{ et } P_2 = P_1 + P = \frac{3PZ}{2l} + P$$

$$P_2 = P \left( \frac{3Z}{2l} + 1 \right)$$

Comme  $Z = 2n$  et  $n = l/9 \Rightarrow Z = \frac{2l}{9}$

$$P_2 = P \left( \frac{3}{2l} \times \frac{2l}{9} + 1 \right) \Rightarrow P_2 = P \left( \frac{3}{9} + 1 \right) \Rightarrow P_2 = P \left( \frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$P_2 = \frac{4P}{3}$$

La surface du triangle rectangle de hauteur  $6n$  est proportionnel à la valeur de  $P_2$  et la compression sur les fibres du bois sera maximum juste sous la tête du tire-fond, soit compression maxi :

$$R_c = \frac{2P_2}{6n} = \frac{P_2}{3n} = \frac{P_2}{3} \times \frac{9}{l} = \frac{3P_2}{l}$$

Comme  $P_2 = \frac{4P}{3}$

$$R_c = \frac{3}{l} \times \frac{4P}{3} ; \text{ finalement } R_c = \frac{4P}{l}$$

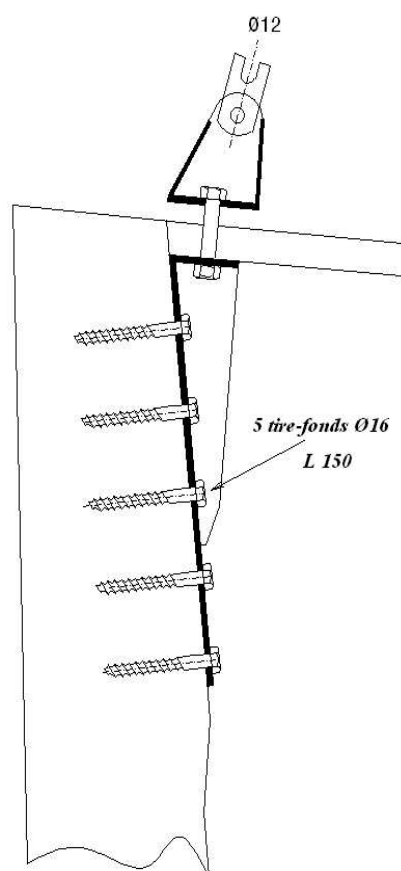
$R_c$  est réparti sur une dimension correspondant au diamètre du tire-fond (approche simplifiée), et finalement :

$$\sigma_{\max} = \frac{4P}{l \times \varnothing}$$

Cela concerne évidemment que les contraintes supportées par le bois. Attention de bien faire la différence entre « dans les sens des fibres » ou « en travers des fibres ».

La formule est semi-empirique, elle considère que le tire-fond est infiniment rigide, ce qui n'est pas le cas.

### Application :



Un étai monotoron de  $\varnothing 12$  est fixé sur la pièce d'étrave, en massif de Yellow Cedar dans le fil, à l'aide de 5 tire-fonds de  $\varnothing 16$  et de 150 mm de long.

La charge de rupture du monotoron est donnée pour 11280 daN soit  $11280/5 = 2256$  daN par tire-fond.

Reprenons notre formule :

$$\sigma_{\max} = \frac{4P}{l \times \varnothing} \text{ soit } \sigma_{\max} = \frac{4 \times 2256}{150 \times 16} = 3,76 \text{ daN/mm}^2$$

Le Yellow Cedar peut résister à une charge au-dessus de 4 daN/mm<sup>2</sup> dans le fil. Le câble est déjà calculé avec un coefficient de sécurité au moins égal à 3, on en déduit que ce même coefficient est pris en compte pour le calcul des tire-fonds.

On vérifiera la résistance au cisaillement des tire-fonds eux-mêmes, pour l'inox :

$8^2 \times \pi \times 10,2 = 2050$  daN , charge de rupture par tire-fond.

Vérifions le fait de prendre en compte la demi-épaisseur de la latte d'inox de 8 mm, soit 4 mm ;  $h=4$  mm dans notre formule :

$$n = \frac{l \left( h + \frac{l}{3} \right)}{3l + 6h}$$

où  $l = 150$ , ce qui donne  $n = 17,089$

comme  $Z = h - n + \frac{l}{3} \dots\dots Z = 36,91$

comme  $P = 2256$  daN et  $b = \frac{2l}{3}$  soit  $b = 100$

$$P_1 = \frac{PZ}{b} \dots P_1 = 832 \text{ daN}$$

$$P_2 = P + P_1 = 3088 \text{ daN}$$

$$u_2 = l - 3n = 150 - 3 \times 17.089 = 98,73$$

$\sigma$  = hauteur max du triangle / Diamètre de la vis.

$$\sigma = 2 \times 3088 / (98,73 \times 16) = 3,90 \text{ daN/mm}^2$$

au lieu de  $3,76 \text{ daN/mm}^2$ .

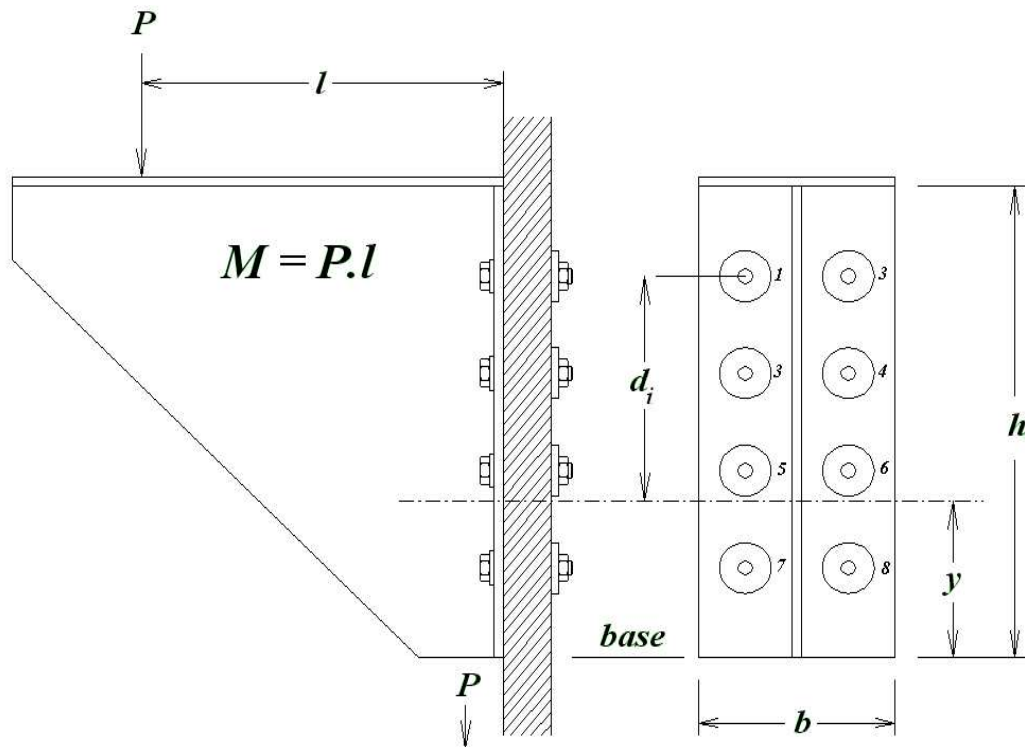
La différence est en effet négligeable, toujours sous la barre des  $4 \text{ daN/mm}^2$ .

[On prendra soin de coller la latte d'incox sur le bois avant de placer les tire-fonds. La surface de collage est de  $100 \times 500 = 50000 \text{ mm}^2$ .

$11280 / 50000 = 0,22 \text{ daN/mm}^2$  (ou  $2,2 \text{ N/mm}^2$ ) en cisaillement de la colle ou du bois dans le fil : les tire-fonds ne seraient pas nécessaires ! ]

\*

### Console boulonnée



Supposons une console comme dessinée ci-dessus avec une partie en acier boulonnée sur un contreplaqué tout Okoumé.

Supposons encore que la platine soit totalement rigide, par exemple grâce à la plaque centrale de renfort, laquelle empêche toute déformation de la partie boulonnée.

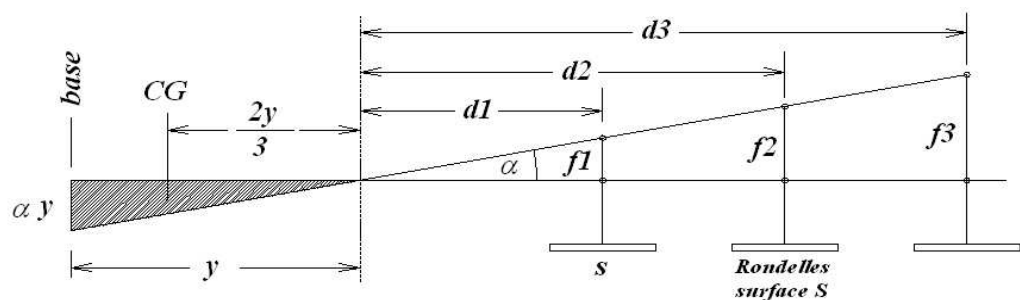
Considérons que les boulons soient infiniment rigides par mesure de simplification.

La force  $P$  induit un couple ou un moment  $P \times l$ , couple que la semelle boulonnée doit assumer en répartissant les contraintes en traction sur les rondelles sollicitées et en compression sur le contreplaqué au bas de la platine, sous un « axe neutre ».

A priori, on ne sait pas où se trouve l'axe neutre à la distance «  $y$  », mais il devrait se tenir en principe à un endroit qui donnera l'égalité des moments en traction et en compression.

Essayons de voir ce que ça donne...

Puisque la platine est supposée infiniment rigide, elle prendra sous la force de flexion un angle  $\alpha$  aussi microscopique soit-il, comme dessiné ci-dessous et s'enfoncera élastiquement dans le contreplaqué en déterminant un « coin » dont le volume peut être pris comme proportionnel à la force appliquée en fonction de son module d'élasticité  $E$ .



$$F = \frac{y \times \alpha y \times b}{2} \text{ ou } F = \alpha \frac{y^2 b}{2}$$

Moment de compression par rapport à  $y$  :

$$m_c = \alpha \frac{y^2 b}{2} \times \frac{2y}{3} \Rightarrow m_c = \alpha \frac{y^3 b}{3} \text{ (inertie)}$$

### **Boulons et rondelles :**

En traction, chaque boulon  $i$  est positionné à la distance  $d_i$  de l'axe neutre et sera sollicité par une force  $f_i$  proportionnelle au déplacement vertical  $\alpha d_i$  de la platine à cet endroit.

$$f_i = \alpha d_i \text{ et } m_i = \alpha d_i \times d_i \text{ soit } m_i = \alpha d_i^2$$

Les forces  $f_i$  se répartissent sur la surface de la rondelle qui « enfonce » le contreplaqué selon son module  $E$ , le même que celui soumis à compression sous la platine. Cette remarque permet de ne pas tenir compte du module d'élasticité  $E$ , qui est de toute manière inconnu en compression en travers des fibres du bois.  $f_i$  devient donc  $f_i \times S$  et  $m_i = \alpha d_i^2 S$

$$\text{Somme des moments : } m_t = \alpha \sum d_i^2 S$$

$$\text{Nous avons donc } \alpha \frac{y^3 b}{3} = \alpha \sum d_i^2 S \text{ ou } \frac{y^3 b}{3} = \sum d_i^2 S$$

Égalité qui dépend de la valeur de  $y$ .

On peut tâtonner en refaisant les calculs avec chaque position de  $y$  mais le plus simple sera d'écrire une fois pour toutes un petit logiciel qui fera le travail en moins d'une seconde.

Un fois  $y$  déterminé, il reste à calculer les forces de traction sur les boulons et les taux de compression sur le contreplaqué, sachant que le moment total  $M$  est à diviser par deux, une moitié pour la compression et une moitié pour la traction.  $\alpha$  est le facteur qui rendra

les moments égaux à  $M/2$  :

$$\alpha = \frac{M/2}{\sum d_i^2 S} \text{ ou } \alpha = \frac{M/2}{\frac{y^3 b}{3}} \text{ puisque } \frac{y^3 b}{3} = \sum d_i^2 S$$

Force sur les boulons et les rondelles :  $f_i = \alpha d_i$

La force répartie sur la rondelle est supportée par le boulon correspondant.

La tension maximum sera celle du boulon le plus éloigné de  $y$  à la distance  $d_{\max}$

$$f_{\max} = \alpha d_{\max} \text{ ou } f_{\max} = \frac{M/2}{\sum d_i^2 S} \times d_{\max}$$

Taux de compression  $\sigma$  sur le contreplaqué :

$$\sigma = \frac{f_{\max}}{S}$$

idem pour le diamètre des boulons à fond de filet.

Surface de la section du boulon ;  $\frac{\pi D^2}{4}$

Avec  $D$  = diamètre à fond de filet.

Taux de contrainte du boulon  $\sigma = \frac{f_{\max} \times 4}{\pi D^2}$

**Platine :**

$$\sigma = \frac{My}{2} / \frac{y^3 b}{3} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{2} \times \frac{3}{y^3 b} \Rightarrow \sigma = \frac{3M}{2y^2 b}$$

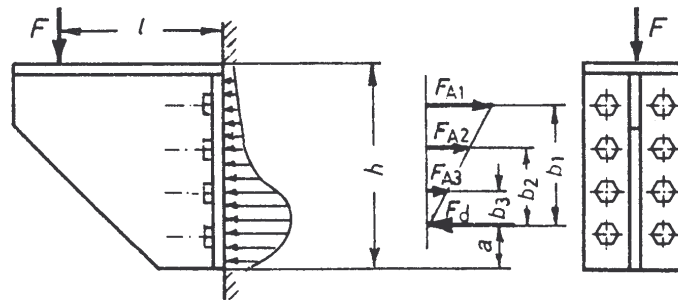
Les vis près de la base sont inutiles.

Tenir compte d'un effort de cisaillement sur les boulons.

## Calcul selon Gieck (formulaire)

**Console** (le calcul exact n'est pas possible)

Hypothèse:  
centre de  
poussée =  
centre de  
rotation,  
p. ex. :  
 $a \approx h/4$ .



Pour rigidité à la flexion:

$$F \cdot l = F_{A1} \cdot b_1 + F_{A2} \cdot b_2 + \dots + F_{An} \cdot b_n$$

$$F_{A1} : F_{A2} : \dots : F_{An} = b_1 : b_2 : \dots : b_n$$

La réaction de la force  $F$  est appliquée sur la platine à un endroit  $Fd$  tel que  $a \approx h/4$  et répartie sur les boulons, selon un angle  $\alpha$ , comme dessiné schématiquement aux distances  $b_1, b_2, b_3, \dots$

$$Fl = \alpha \sum b_i^2 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{Fl}{\sum b_i^2}$$

ce qui permet de déduire les forces  $f_i$  :

$$f_1 = b_1 \frac{Fl}{\sum b_i^2}, \quad f_2 = b_2 \frac{Fl}{\sum b_i^2} \dots \dots \dots$$

L'approximation est très supérieure à mon calcul puisque le moment total  $Fl$  n'est pas réparti pour moitié en compression et pour moitié en traction.

On peut estimer que cela conviendra en règle générale et donnera un fort coefficient de sécurité quand il s'agit d'un montage acier sur acier.

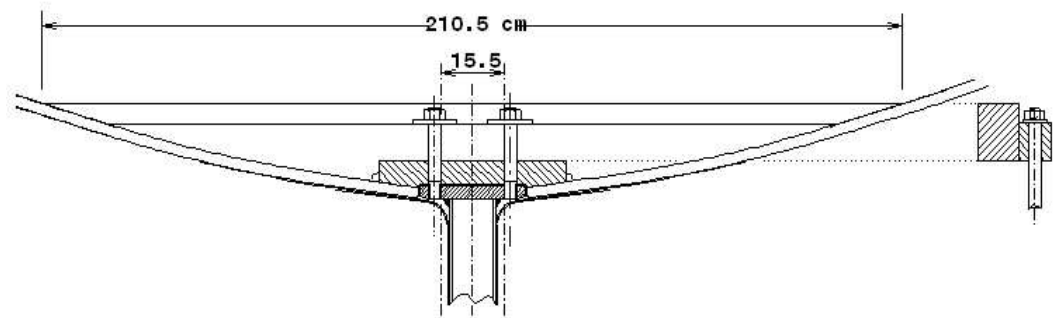
Le montage sur contreplaqué ou bois demande plus d'attention car la force de réaction  $Fd$  ne sera pas assumée de cette manière ponctuelle. On reviendra au calcul précédent.



## Les varangues

Après avoir calculé les fixations de la quille sur le fond de la coque, il convient d'étudier de quelle manière les efforts seront repris par la structure transversale du navire, soit par les varangues.

Exemple d'une varangue de mon plan « B13-50 » de 13,50 m :

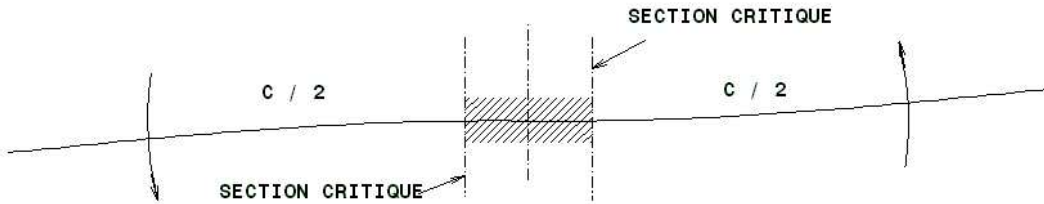


Le lest pèse 3400 kg avec un CG situé à 153 cm sous le centre moyen des 6 varangues qui se répartissent le couple maxi, soit par varangue : ( $g=9,81$ )

$$C = \frac{3400 \times 153 \times 9,81 \times 0,1}{6} = 85053 \text{ daN.cm}$$

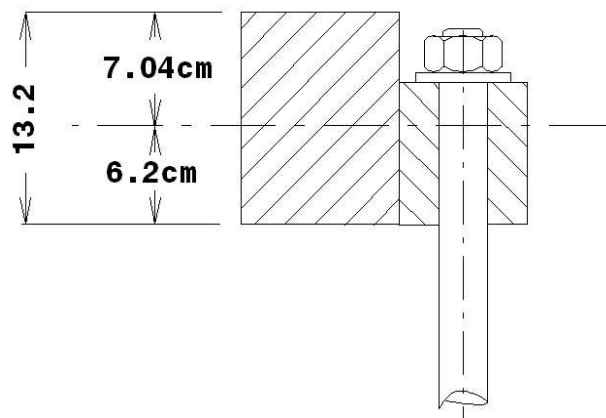
Jusqu'à présent, dans nos calculs de bordé, de poutres associées, de barrots, de poutres de liaison des multicoques, etc, nous cherchions à connaître quel était le moment ou couple maxi assumé par la « poutre » en question afin de pouvoir en déterminer l'échantillonnage. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous connaissons le couple maxi puisqu'il est donné par le moment du poids de la quille par le bras de levier comme indiqué ci-dessus.

On se retrouve donc avec deux consoles encastrées au centre, schématiquement comme ceci :



... avec une partie « rigide » composée de la platine du lest en acier.

En principe la varangue est associée au bordé mais comme ce dernier est découpé pour l'encastrement de la platine, nous l'ignorons tout simplement et nous réduisons encore la section de la varangue en tenant compte du trou de passage du boulon, ce qui permet de dessiner la « section critique ». Voilà une hypothèse très réductrice que nous adoptons en premier lieu pour vérifier l'échantillonnage décidé *a priori*.



On choisit un bois assez dur pour assumer l'écrasement des contre-plaques sous les écrous et avec un module  $E$  élevé en flexion pour réduire les encombrements. On prendra du Sapelli avec  $E = 13500 \text{ N.mm}^2$  ou  $135000 \text{ daN.cm}^2$

Elément	cm		°	daN/cm <sup>2</sup>		cm	cm <sup>4</sup>
	H	L		Et	Ec		
Sapelli	13,2483	10,0000	0,00	135000	135000	6,6242	1938
Sapelli	8,8665	2,5000	0,00	135000	135000	4,4239	145
Sapelli	8,8571	2,5000	0,00	135000	135000	4,4286	145
Surface totale	176,793						
Fibre neutre	6,205						
Inertie totale	2 391,242987						
EI haut	161 408 901						
EI bas	161 408 901						
EI total	322 817 803						
Ef résultant	135000 daN/cm <sup>2</sup>						

### Calcul des contraintes maxi :

$$\text{Inertie} = 2391 \text{ cm}^4$$

Le demi couple à considérer sera :

$$M = C/2 = 42527 \text{ daN.cm}$$

Contraintes maxi à la fibre  $v = 7,04 \text{ cm}$  :

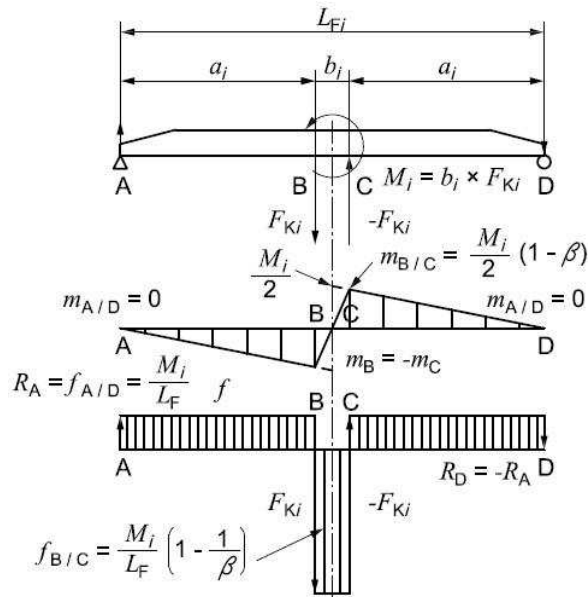
$$\sigma = \frac{M \times v}{I} \Rightarrow \sigma = \frac{42527 \times 7,04}{2391} = 125 \text{ daN/cm}^2$$

ou  $12,5 \text{ N/mm}^2$ . Avec une forte accélération de, disons 3 g, cela donne  $37,5 \text{ N/mm}^2$ . Avec un coefficient de sécurité de « 2 », on arrive à  $75 \text{ N/mm}^2$  ce qui est correct pour le Sapelli qui peut supporter jusqu'à environ  $80 \text{ N/mm}^2$ .

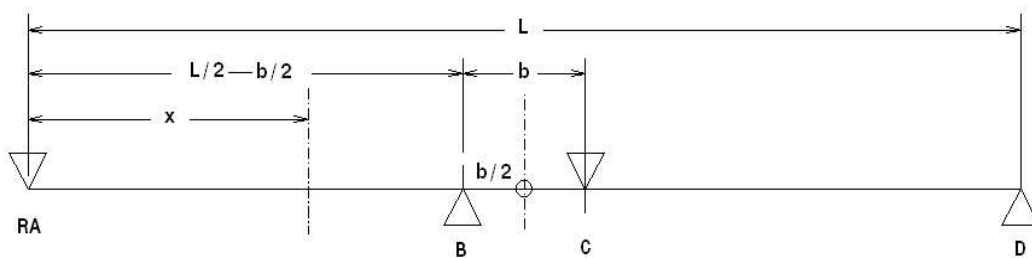
Mais les varangues doivent également être en mesure de supporter des pilonnements à l'échouage et résister à un choc contre un caillou, autant que possible. Il n'y aura donc jamais lieu de trop lésiner sur la robustesse des varangues.

Dans ces calculs, je n'ai pas compté les renforts en tissu de verre / époxy.

### Que disent les normes (ISO 12215-9 de 2011) ?



Ou d'une manière plus lisible :



$$R_A = \frac{M}{2} \div \frac{L}{2} = \frac{M}{2} \times \frac{2}{L} = \frac{M}{L}$$

Moment de flexion en B :

$$m_B = R_A \times \left(\frac{L}{2} - \frac{b}{2}\right) \Rightarrow m_B = \frac{M}{L} \times \left(\frac{L}{2} - \frac{b}{2}\right)$$

$$m_B = \frac{M}{2} \times \frac{-Mb}{L} \Rightarrow 2m_B = M \times \left(1 - \frac{b}{L}\right)$$

$$m_B = \frac{M}{2} \times \left(1 - \frac{b}{L}\right) \text{ si } \beta = \frac{b}{L} \text{ alors } m_B = \frac{M}{2} \times (1 - \beta)$$

Quelle sera la différence avec notre approche schématique ?

Avec les mêmes données, on trouve, selon les normes,

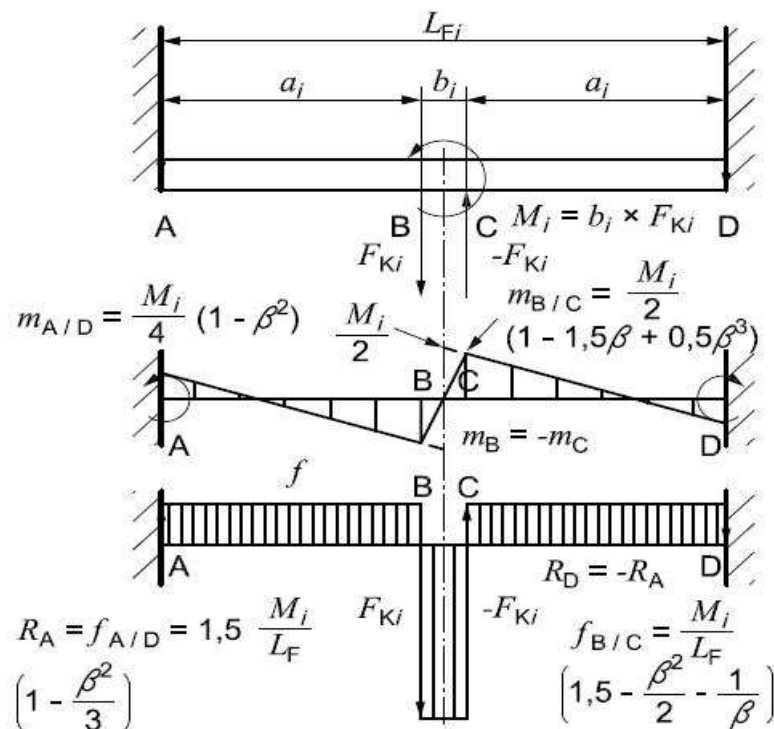
un couple à la section critique égal à 39395 daN.cm

Soit une réduction de  $\frac{39395}{42527} = 0,926 \dots$

La valeur de « b » peut varier d'une varangue à l'autre et n'est pas aussi évidente selon que le boulon est sollicité en traction ou selon que la platine est appuyée sur le fond de la coque.

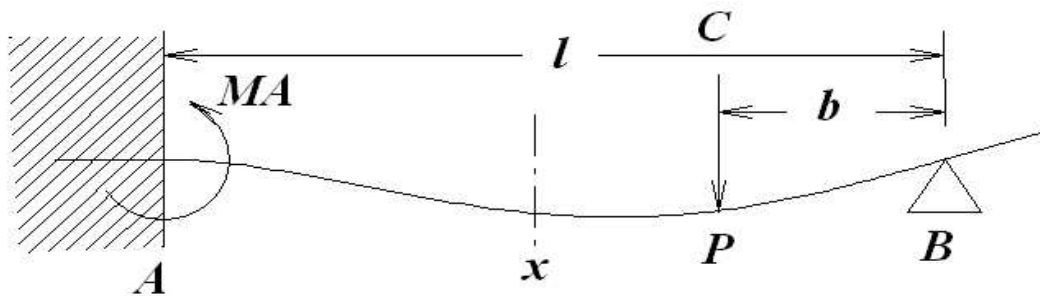
Compte tenu de l'empirisme général aussi bien en ce qui concerne les accélérations ou le coefficient de sécurité, le rapport de 0,926 dans notre cas semble assez peu significatif ou pas du tout déterminant. Nous verrons plus loin les questions de cisaillement au cœur de la varangue.

Les normes proposent également une autre configuration de type de fixation comme ici, encadrée en ses extrémités :



On se retrouve dans le cas de figure classique de la console encastrée en A et supportée en B.

«  $b$  » est la demi-largeur de la platine et  $l = \frac{L_{Fi}}{2} + \frac{b}{2}$



Les moments de flexion sont à calculer dans deux domaines entre A et C et C et B.

On ne connaît pas le moment  $MA$  ni les réactions  $RB$  et  $RA$  de manière évidente. Mais on conçoit que la force  $P$  ( $\frac{M_i}{b_i}$ ) sera supportée par l'appui en B et soula-

gée par le couple  $MA$  en A d'une manière en relation directe avec la raideur  $EI$  de la varangue. On sait également que la ligne élastique présente une continuité en passant du domaine 1 au domaine 2 par une pente commune au point « C »...

Comparons avec la varangue de l'exemple.

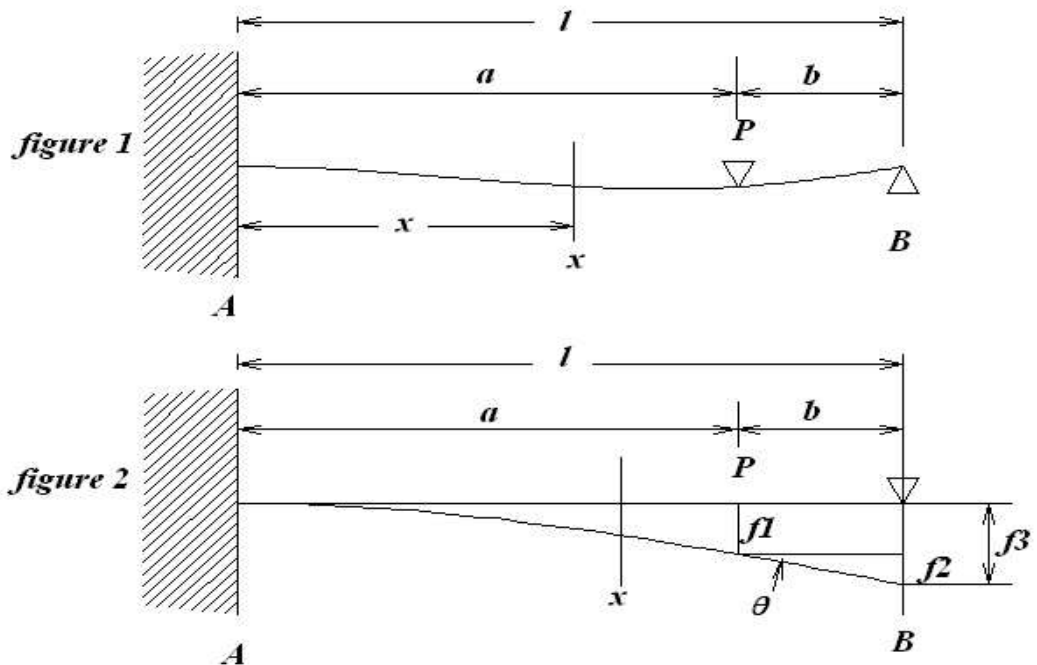
La figure des normes indique :

$$\beta = \frac{b}{L_F} = \frac{15,5}{210,5} = 0,0736 \quad m_B = \frac{M}{2} \times (1 - 1,5\beta + 0,5\beta^3)$$

ce qui donne 37840 daN.cm, soit une réduction de :

$$\frac{37840}{42527} = 0,89. \text{ Mêmes remarques que précédemment.}$$

## Voyons la théorie



La poutre est encastree en  $A$  et appuyee en  $B$ .

Le systeme est hyperstatique, c'est-à-dire que les reactions sur les appuis dependent de la flexibilite de la poutre. En realite l'encastrement en  $A$  procure un couple qui soulage le moment de flexion au point d'application de la force  $P$ .

On peut resoudre ce probleme en supposant (figure 2) une poutre virtuelle libre du support en  $B$ . Sous l'effet de la charge  $P$  la fleche  $f3$  sera egale à  $f1 + f2$ .

Quelle sera la force en  $B$  capable de procurer cette fleche ? La solution donnera la force de reaction  $RB$  en  $B$  lorsque le support en  $B$  sera mis en place...

À la distance  $a$ , la fleche est egale à :  $f_1 = \frac{Pa^3}{3EI}$

Pour nos calculs ici, estimons que  $EI = 1$  par mesure de simplification. L'hypothese selon laquelle  $EI$  est

constant est impératif pour entrer dans ces calculs. En

conséquence :  $f_1 = \frac{Pa^3}{3}$

L'angle de rotation de la poutre au point d'appui  $P$  sera donné par la dérivée de la fonction de la courbe, ou par l'intégrale du moment de flexion comme nous l'avons déjà vu.

Soit  $M(x) = Px$  et  $\theta = \frac{Px^2}{2} + C$

Pour  $x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow C = 0$  et  $\theta = \frac{Px^2}{2}$

Pour  $x = a \Rightarrow \theta = \frac{Pa^2}{2}$

ce qui permet de calculer  $f_2$  :  $f_2 = b\theta = \frac{Pa^2b}{2}$  et

$$f_3 = f_1 + f_2 = \frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2b}{2} \Rightarrow f_3 = \frac{2Pa^3 + 3Pa^2b}{6}$$

soit :  $f_3 = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{6}$

Pour obtenir cette flèche à la distance  $l$  de  $A$ , la force virtuelle nécessaire  $P_v$ , doit être calculée comme suit :

$$f_3 = \frac{P_v l^3}{3} \Rightarrow P_v = \frac{3f_3}{l^3} \text{ soit } P_v = \frac{3Pa^2(2a + 3b)}{6l^3} \text{ et donc}$$

on déduit de là que  $RB = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3}$

Maintenant, calcul de  $RA$  :

La somme  $RA + RB$  doit logiquement être égale à  $P$ , ainsi le système est en équilibre, ce qui permet



d'écrire :

$$RA = P - \frac{Pa^2(2a+3b)}{2l^3}$$

Avec  $a = (l - b)$ , l'équation devient :

$$RA = \frac{P2l^3}{2l^3} - \frac{P(l-b)^2(2(l-b)+3b)}{2l^3}$$

$$RA = \frac{P}{2l^3}(2l^3 - (l-b)^2(2(l-b)+3b))$$

$$RA = \frac{P}{2l^3}(2l^3 - 2(l-b)^3 - 3b(l-b)^2)$$

développons :

$$RA = \frac{P}{2l^3}(2l^3 - 2(l^3 - b^3 - 3l^2b + 3lb^2) - 3b(l^2 + b^2 - 2lb))$$

$$RA = \frac{P}{2l^3}(2l^3 - 2l^3 + 2b^3 + 6l^2b - 6lb^2 - 3bl^2 - 3b^3 + 6lb^2)$$

après réduction :

$$RA = \frac{P}{2l^3}(-b^3 + 3l^2b) \text{ et } RA = \frac{Pb}{2l^3}(3l^2 - b^2)$$

Moment maximum au point d'application de  $P$  :

$$M_{\max} = RBb = \frac{Pa^2b(2a+3b)}{2l^3}$$

Reprenons notre exemple en supposant que les extrémités de la varangue soient encastées avec

$$P = 0,5 \times \frac{M_i}{b_i} ; l = 105,25 \text{ cm} ; b = 7,75 ; a = 97,5 \text{ cm}$$

$$P = 0,5 \times \frac{85053 \text{ daN.cm}}{7,75 \text{ cm}} = 5487 \text{ daN}$$

$$RB = \frac{Pa^2(2a+3b)}{2l^3} = 4882 \text{ daN}$$

$$M_{\max} = RB \times b = 37836 \text{ daN.cm}$$

(37840 daN.cm d'après les normes)

La réaction RA à l'endroit de l'encastrement sera :

$$RA = \frac{Pb}{2l^3}(3l^2 - b^2) = 605 \text{ daN}$$

(4882 + 605 = 5487 le compte est bon.)

Le résultat corrobore exactement celui des normes.

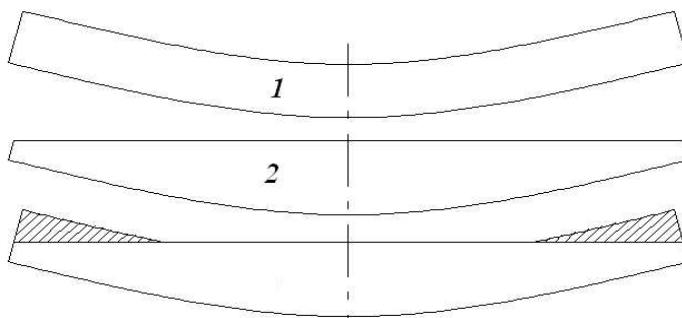
En principe il faudrait considérer que la partie « b » serait infiniment rigide, mais disons que l'approche est à peu près réaliste.

## Discussion

Je reste toujours très circonspect quand il s'agit « d'encastrement parfait », notion très peu respectée dans la plupart des cas, mais ce n'est pas tout.

Les moments et les réactions sur les appuis dans le cas qui nous occupe, sont déduits de la ligne élastique des poutres avec un  $EI$  constant absolument nécessaire pour la résolution du problème tel qu'elle est développé ci-dessus.

Le dessin des varangues ne sera, en général, pas conçu de cette manière, surtout dans la construction en bois.



La varangue 2 est plus solide que la n°1 sans entrer dans de grandes démonstrations. La variation de  $EI$  n'est pas prise en compte dans le calcul des moments pour le cas rare des varangues de section constante, quand elles sont conçues en bois. Le calcul ne s'applique donc pas ici de manière aussi précise.

Les normes de l'ABS calculent simplement l'échantillonnage au centre de la varangue avec le couple donné par le lest, sans tenir compte de la longueur des varangues, ce qui semble en effet être une approche globale simplifiée mais, à mon avis, assez réaliste.

Il n'est pas toujours facile ni aisé de choisir une hypothèse de calcul aussi réaliste que possible et les erreurs d'appréciation peuvent survenir assez souvent avant de bien « appréhender » la question. C'est pourquoi quand une idée non coutumière est présentée, on se doit de la regarder très en détail. Dans le doute on reviendra aux bonnes vieilles méthodes d'antan, qui finalement ont fonctionné pendant des siècles.

Ce qui vient immédiatement à l'esprit (du mien ?) pour la représentation du travail des varangues du lest, sera une combinaison de 2 consoles travaillant en opposition, comme je l'ai admis pour les calculs de mes nombreux lests en activité. Dans ce cas le couple ou « moment » est donné directement ( $M = \text{poids du lest} \times \text{distance de son } C_g \text{ au centre estimé des varangues}$ ). Ce moment sera le seul à prendre en considération pour déterminer l'échantillonnage de la varangue à sa section critique. En adoptant cette option, on s'aperçoit que la longueur de la varangue n'entre pas en ligne de compte dans le calcul du moment à la sec-

tion critique.

En effet  $M_{\max} = Pl$  dans ce cas de figure où «  $P$  » sera la réaction en bout de varangue et «  $l$  » la demi longueur de celle-ci. Puisque le moment est connu, il ne s'agit pas de le calculer mais bien de calculer la réaction en bout de varangue, force qui devra servir à prévoir soit une prolongation sur une membrure, soit une reprise sur des carlingues judicieusement positionnées. Par exemple, on pourra utiliser les façades verticales des banquettes dans le carré, ce qui donne directement la longueur «  $l$  » de la demi-varangue.

En prenant  $M = \frac{C}{2}$  (le demi couple, une moitié pour bâbord et un moitié pour tribord), on a :

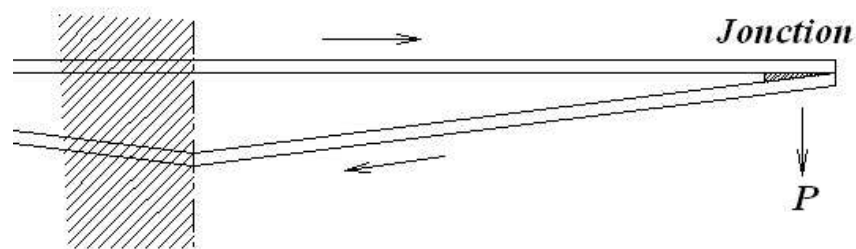
$$P = \frac{M}{l}, \text{ valeur de la force à considérer et à répartir..}$$

**Les contraintes de cisaillement** dans les varangues de section variable ne sont pas aussi évidentes que ce qui peut être indiqué pour des sections constantes.

Lorsque la varangue est constituée de bois massif, le cisaillement est assumé sur toute la longueur et toute la largeur de la varangue. La contrainte reste toujours assez minime en rapport avec la surface sollicitée.

Le cisaillement est normalement repris par l'âme des composites, également sur la même surface mais les âmes en mousse, par exemple, sont bien moins résistantes que le bois massif. Il convient donc de les vérifier avec beaucoup de précautions.

Imaginons maintenant une varangue évidée de l'intérieur comme dessiné ci-dessous et supposons que les deux branches ne flambent pas sous les contraintes de compression et de traction qui composent la flexion.



On voit immédiatement que les contraintes de cisaillement seront entièrement assumées par la pièce de jonction (hachurée) en bout de la varangue. La surface devra être suffisante pour cette fonction. Voilà une manière assez parlante et radicale d'envisager les choses avec des varangues de section variable.

\*

## Les espars

**I**l s'agit des mâts, bômes, pics, vergues, tangons...

Les espars en bois sont plus lourds que les espars en aluminium ou en composite de carbone qui sont mécaniquement très supérieurs mais malheureusement très onéreux !

Comparons néanmoins un espar en alu et en bois pour se faire une idée plus précise.

Pour comparer ce qui est comparable, intéressons-nous aux profils de même raideur  $EI$ .

Prenons un tube en alu de 20 cm de diamètre et de 3 mm d'épaisseur.

Ses caractéristiques sont les suivantes :

$$\text{Surface} : \frac{(0,20^2 - 0,194^2)\pi}{4} = 0,00185668 \text{ m}^2$$

$$\text{Densité} : 2700 \text{ kg/ m}^3 \text{ et } E = 700000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\text{Poids au mètre} : 0,00185668\text{m}^3 \times 2700 = 5,01 \text{ kg}$$

$$\text{Inertie} : \frac{(20^4 - 19,4^4)\pi}{64} = 900,908 \text{ cm}^4$$

$$EI_{alu} = 900,908 \times 700000 = 630635600 \text{ daN.cm}^4$$

Prenons maintenant du Spruce ou un bel Épicéa dont la densité est de 420 kg/m<sup>3</sup> et E=110000 daN/cm<sup>2</sup>

Pour obtenir une raideur équivalente à celle du tube alu, l'inertie du Spruce devrait être :

$$\frac{630635600}{110000} = 5733 \text{ cm}^4$$

En principe on prendra l'épaisseur de la paroi environ égale à 20% de la dimension maxi correspondante.

Prenons un cylindre creux de 20 cm de diamètre, il faudrait que son épaisseur soit de 4 cm et son diamètre intérieur de 12 cm.

$$\text{Son inertie serait} : \frac{(20^4 - 12^4)\pi}{64} = 6836,10 \text{ cm}^4$$

Trop importante puisqu'on cherche 5733 cm<sup>4</sup>

$$\text{Rapport d'échelle} : \frac{5733}{6836,10} = 0,83861$$

Pour obtenir les dimensions linéaires, le rapport doit être élevé à la puissance 1/4 :  $0,83861^{0,25} = 0,95695$

qui donne :

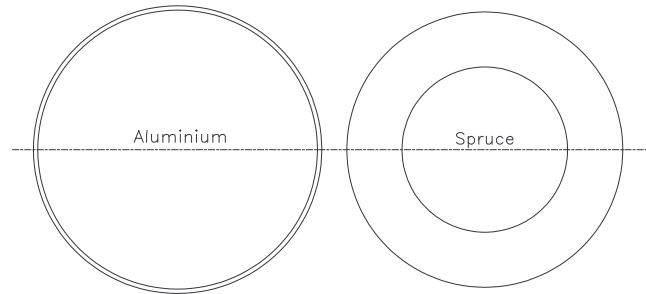
$$\text{diamètre extérieur} : 20 \times 0,95695 = 19,139 \text{ cm}$$

diamètre intérieur :  $12 \times 0,95695 = 11,483 \text{ cm}$

inertie  $\frac{(19,139^4 - 11,483^4)\pi}{64} = 5733 \text{ cm}^4 - \text{Ok}$

Surface :  $\frac{(0,19139^2 - 0,11483^2)\pi}{4} = 0,018413 \text{ m}^2$

Poids au mètre :  $0,018413 \text{ m}^3 \times 420 = 7,73 \text{ kg}$



Voici ce que donnent ces deux sections de raideur  $EI$

égale. Le Spruce est  $\frac{7,73}{5,01} = 1,54$  fois plus lourd que

l'alu.

On peut également chercher à préserver le diamètre extérieur de 20 cm, dans ce cas on devra calculer le diamètre intérieur «  $x$  » qui donnera la même inertie

recherchée :  $\frac{(20^4 - x^4)\pi}{64} = 5733 \text{ cm}^4$  d'où :

$$x = \left( 20^4 - \frac{5733 \times 64}{\pi} \right)^{0,25} = 14,4175 \text{ cm}$$

épaisseur de la paroi :  $(20 - 14,4175) \div 2 = 2,79 \text{ cm}$  au lieu de  $3,828 \text{ cm}$  ce qui pourrait sembler insuffisant...

Nous avons recherché la même inertie pour respecter une même résistance au flambage mais qu'en est-il de la solidité sous l'effet d'un même moment de flexion ?

La limite élastique «  $\sigma$  » de l'aluminium est de 2400 daN/cm<sup>2</sup>. La rupture de l'épicéa se produit à 600

daN/cm<sup>2</sup>.

Le moment maxi sera :  $\sigma = \frac{Mf \times r}{I} \Rightarrow Mf = \frac{\sigma I}{r}$

Pour les sections calculées, nous avons donc

Aluminium :  $Mf = \frac{2400 \times 900,908}{6cm} = 360363 daN.cm$

Épicéa :  $Mf = \frac{600 \times 5733}{5,74156cm} = 599105 daN.cm$

Il y aurait donc un avantage pour l'Épicéa, cela signifierait que le bois supporterait plus de flexion que l'alu.

La comparaison n'est pas menée ici à poids égal mais à inertie égale, ce qui modère l'avantage du bois..

Il faut aussi compter avec un coefficient de sécurité supérieur pour le bois qui n'est pas toujours mécaniquement très constant et ne possède pas de « limite élastique » comme l'alu, mais une limite de rupture...

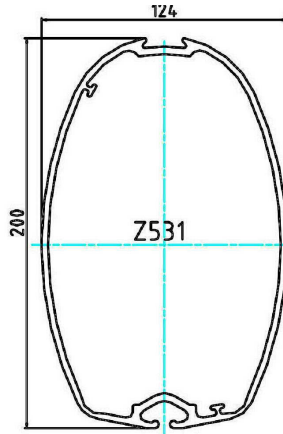
Pour ce qui concerne le poids comparatif, le bois permet facilement d'usiner des rétreints en haut et en bas du mât ce qui fait gagner un peu de poids d'un facteur de 0,90 environ.

Soit  $1,54 \times 0,90 = 1,39$ .

Tout cela reste théorique car les profils de mâts extrudés en alu ne sont jamais exactement adaptés, ils sont choisis parmi les standards « au dessus » du profil idéal.

Voyons ce que cela donne avec un cas concret existant :





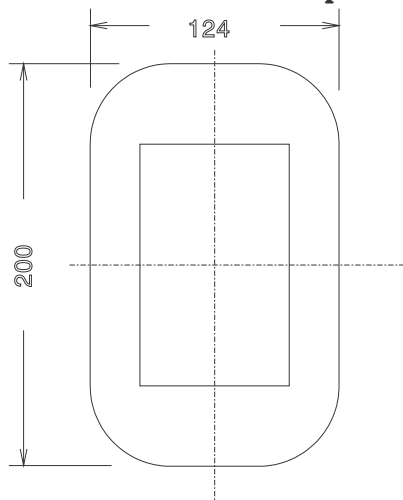
Voici le profil en aluminium de Z-Spars installé sur « L'Enfant Perdu » Yako. Les inerties sont :

IL (longitudinal) ;  $998 \text{ cm}^4$

IT (transversal) :  $380 \text{ cm}^4$

Il pèse  $5,38 \text{ kg/m}$

Essayons un profil en Spruce de  $420 \text{ kg/m}^3$  de densité, avec les mêmes dimensions extérieures et les parois épaisses de 20% de la cote correspondante :



Qui donne :

IL =  $6047 \text{ cm}^4$

IT =  $2371 \text{ cm}^4$

Épaisseurs : 40 et 24,8 mm, Rayon 40 mm.

Pour obtenir la même raideur EI que celle du profil en

alu, il faudrait que les inerties IL et IT soient ;

$$IL = \frac{988 \times 700000}{110000} = 6287 \text{ cm}^4$$

$$IT = \frac{380 \times 700000}{110000} = 2418 \text{ cm}^4$$

Nous y sommes presque mais le profil essayé est un peu trop faible pour « IL » en comparaison.

Le rapport d'augmentation est :

$$\frac{6287}{6047} = 1,0397 \text{ élevé à la puissance } \frac{1}{4} : 1,009777$$

Redessinons le profil avec ce rapport d'échelle. Les dimensions deviennent :

$$200 \times 1,009777 = 203 \text{ mm}$$

$124 \times 1,009777 = 125 \text{ mm}$  ce qui donne les inerties suivantes :

$$IL = 6287 \text{ et } IT = 2565 \text{ cm}^4 \text{ .....OK}$$

La surface de la section devient  $0,0147806 \text{ m}^2$

Et le poids ;  $0,0147806 \times 420 = 6,21 \text{ kg/m}$

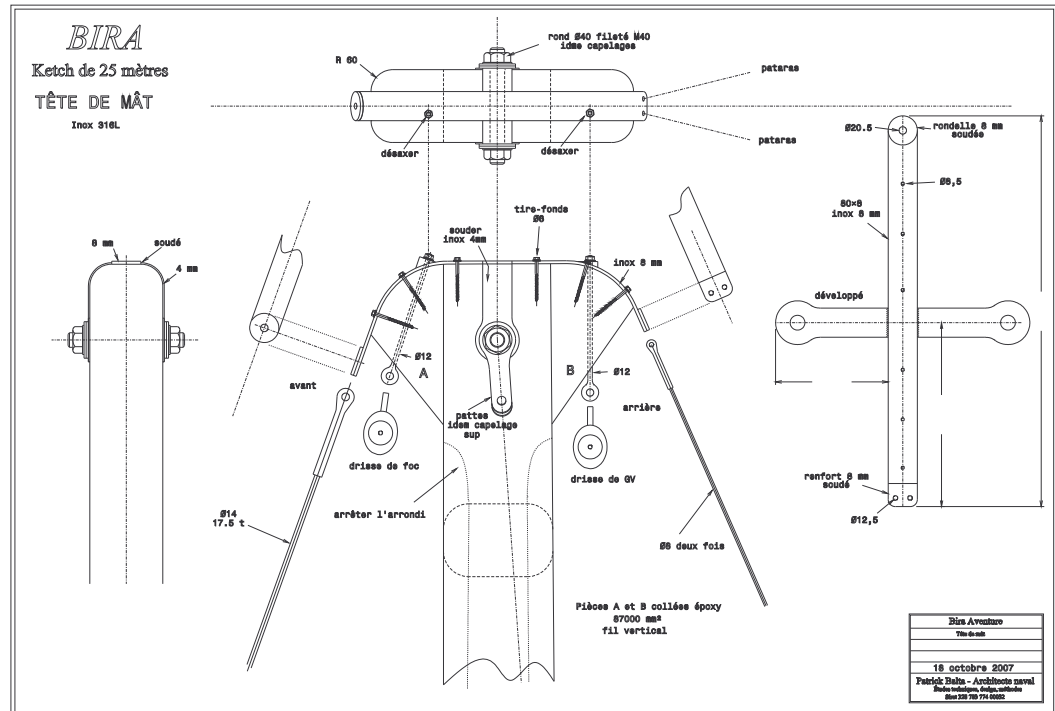
Avec un rapport des poids entre l'alu et le Spruce de :

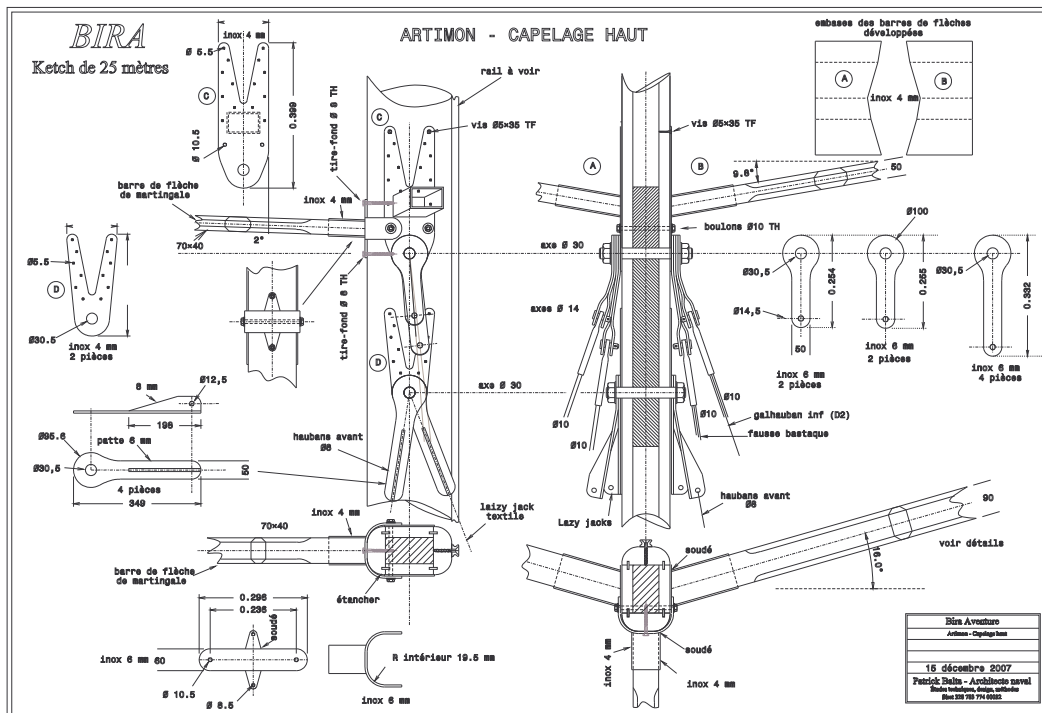
$$6,21 / 5,38 = 1,154.$$

On peut espérer une diminution d'un facteur 0,9 pour les rétreints en tête et en pied :  $1,154 \times 0,9 = 1,039$

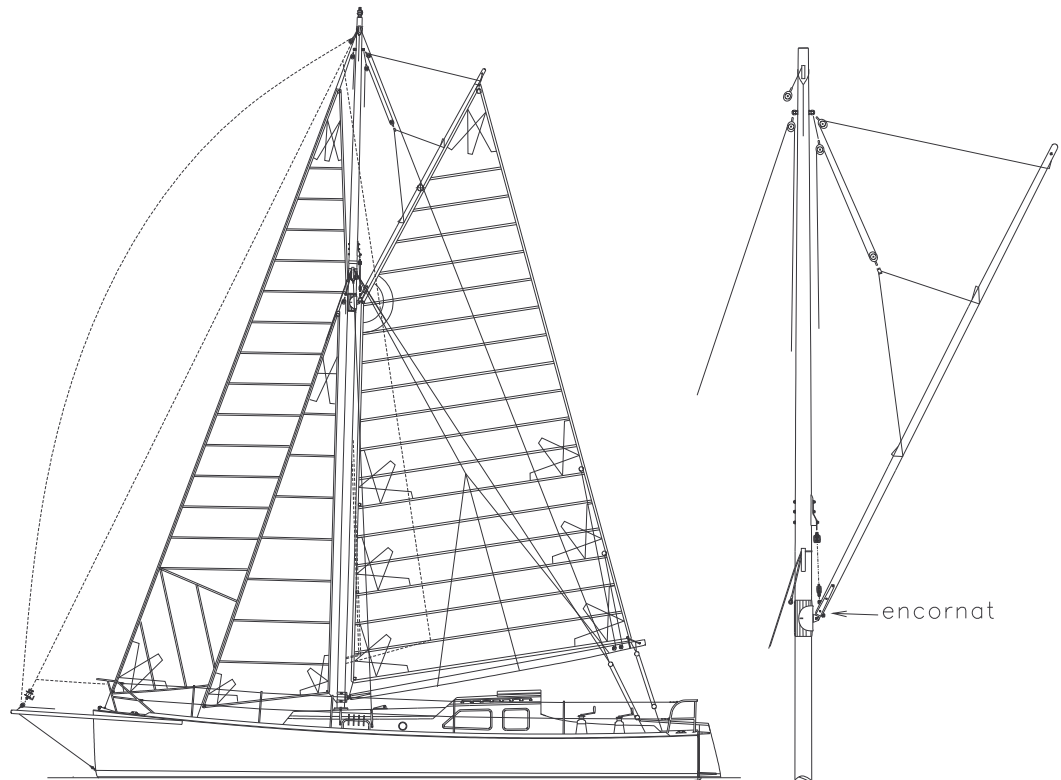
On pourrait presque retrouver le poids de l'alu en travaillant encore la section qui est un peu forte en transversal mais la forme de la section n'est pas la même ; en Spruce, elle donne de meilleures inerties que si elle était profilée comme celle de l'alu. Les calculs comparatifs doivent rester assez objectifs ! Maintenant d'un point de vue pratique, il faut compter avec la colle, les

protections intérieures, les vernis ou les peintures et surtout les ferrures qui peuvent être assez lourdes et très complexes à réaliser. De plus l'entretien est plus délicat que celui de l'alu qui est quasiment nul, c'est là un aspect des choses de grande importance.





Malgré tout les « vieux gréements » tels que les gréements auriques demandent des espars en bois réalisés sans ferrures ou presque. Ces gréements classiques imposent une section de mât circulaire pour l'articulation de l'encornat, c'est-à-dire à la liaison entre le mât et le pic.

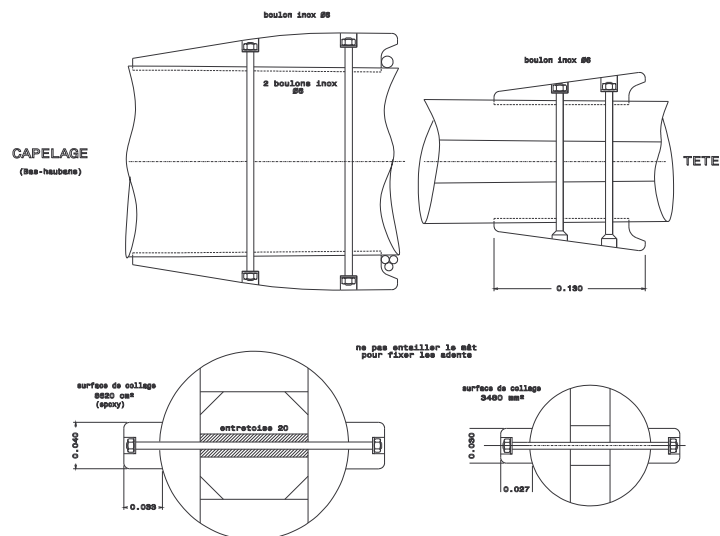


Dans ce cas pour éviter de fabriquer des ferrures complexes, on gréera les haubans sur des « adents », sortes de cales en bois soutenant les ganses des câbles autour du mât ou des espars en général.

*L'Enfant Perdu*

ADENTS

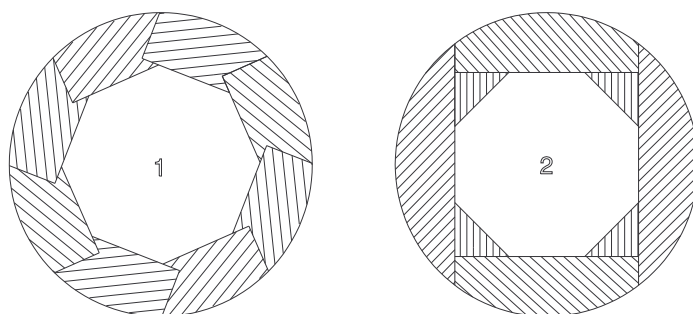
ADENTS en bois dur  
sis en forme  
et collés epoxy



La discussion reste ouverte au sujet de la fabrication de mâts en Spruce, en Épicéa ou en Pin d'Orégon.

Il est évident que le bois le plus léger aura un meilleur rapport inertie / poids comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, ce qui exclu le Pin d'Orégon, à mon humble avis. Toutefois on se méfiera des bois trop tendres qui obligeraient à augmenter le diamètre de manière excessive. Le Spruce a prouvé ses qualités exceptionnelles depuis très longtemps pour cet usage.

Certains charpentiers utilisent la méthode n°1 comme dessinée ci-dessous,



laquelle se présente avec une certaine élégance et beaucoup de raffinement dans la méthode.

Personnellement, j'ai toujours préféré la configuration n° 2 : les poids au mètre et les inerties sont exactement les mêmes puisque l'intérieur est constitué du même octogone. Les surfaces de collage sont plus importantes dans le n°2.

Le travail des retreints est nettement plus facile avec le n°2, ce qui fait gagner davantage de poids....

Maintenant, j'ai eu l'honneur d'étudier avec Jean-Pierre Maréchal son dernier gréement. Il s'agissait du gréement de « Étoile Horizon » aurique avec un mât

en alu et un encornat sur chariots.

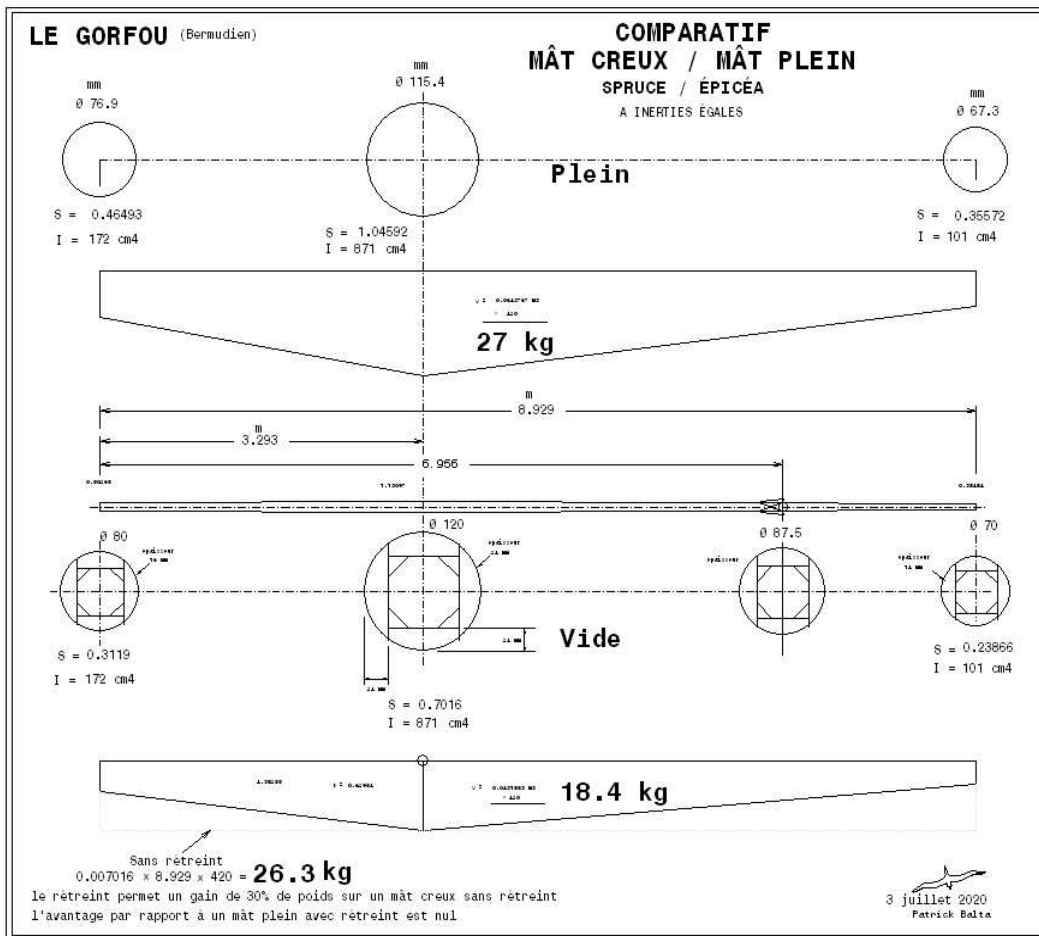


Étoile Horizon au départ pour Reykjavik, Islande.

\*

**Poursuivons nos petits comparatifs** avec cet exemple entre un mât plein et un mât creux : il s'agit du mât en Spruce de mon « Gorfou », petit sloop bermudien de 6,50 m.

Le mât massif (plein) avec les rétreints tels que dessinés pèse 27 kg. Le diamètre maxi est de 115,5 mm et l'inertie maxi à cet endroit est de  $871 \text{ cm}^4$ , puis  $172 \text{ cm}^4$  en pied et  $101 \text{ cm}^4$  en tête.



Essayons un mât creux présentant les mêmes inerties aux mêmes endroits avec des parois d'une épaisseur variable de 20% du diamètre.

Le diamètre maxi passe de 115,4 à 120 mm. Il pèse maintenant 18,4 kg. Le gain de poids sera donc d'un facteur de  $18,4 / 27 = 0,68$

[Notons que le mât creux, avec la même section maxi au centre mais sans rétreint, pèserait 26,3 kg. C'est dire que d'ouvrager un mât creux sans effectuer des rétreints n'avance à rien comparé à un mât plein rétreint aux extrémités !]

Revenons à notre exemple comparatif plein/creux. Les inerties sont les mêmes et donc la souplesse sera la



même dans les deux cas (EI) puisque le matériau est le même.

Qu'en est-il de la solidité ?

Avec une contrainte max de  $\sigma = 600 \text{ daN/cm}^2$  dans

les deux cas, le moment de flexion max sera  $Mf = \frac{\sigma I}{r}$

On trouve pour le mât plein :

$$Mf = \frac{600 \times 871}{0,5 \times 11,54} = 22643 \text{ daN.cm}$$

Pour le mât creux :

$$Mf = \frac{600 \times 871}{0,5 \times 12} = 21775 \text{ daN.cm}$$

Le mât creux est plus fragile d'un facteur de :

$$\frac{21775}{22643} = 0,96$$

Le rapport est évidemment celui des diamètres :

$$\frac{11,54}{12} = 0,96, \text{ à inerties égales.}$$

Le mât plein acceptera de fléchir très légèrement davantage avant de se rompre.

Dans tous les cas, un mât en bois acceptera plus de contraintes qu'un mât en alu de même raideur EI.

Il y a donc une bonne mesure à trouver en toutes choses.

## Quelques mots sur mon métier

Qu'est-ce qu'un architecte naval ? Un créateur ? Un ingénieur ? Un dessinateur ? Un artiste designer ?

Il est tout cela à la fois et même plus s'il est lui-même constructeur, ce qui fut mon cas.

Un architecte naval est, en principe, indépendant. Il exerce sa profession en libéral.

Il peut tout de même être engagé dans un bureau d'étude comme ingénieur ou comme dessinateur mais dans ce cas il ne signe pas son travail, sauf accords préalables, tout est possible.

C'est ici que vient la question cruciale : celle de sa notoriété et celle de son « image ».

Les clients viennent à lui grâce à la notoriété qu'il a acquise en général, assez difficilement, après des années et des années de labeur jusqu'au jour où "il n'a plus rien à prouver".

Je précise que l'architecte naval accomplit et signe son œuvre dont il garde la propriété intellectuelle à vie, c'est le juste revers de la médaille.

Il dessine donc un bateau original et propose les plans pour la construction amateur, professionnelle, à l'unité ou en série...

Mais les choses ne sont pas toujours aussi simples car il y a le marché avec la mode et les progrès techniques.

Un plan dans le style des années 60 n'aura aucun succès, sauf pour une commande particulière bien précise.

Il faut donc impérativement trouver et produire le dessin qui plaira tout en gardant un " style " pour se dé-

marquer des concurrents et pérenniser son nom.

Maintenant que se passe-t-il quand un client demande un plan particulier, juste pour lui ?

Précisons ceci au préalable : un client s'adresse à l'architecte naval qu'il a choisi compte tenu de la notoriété de ce dernier et de son approche de l'esthétique. Demander à un architecte naval de dessiner et de signer un plan dans un style qui n'est pas le sien n'a pas de sens ! Et pourtant..

J'ai malheureusement souvent rencontré cette situation : puisque je possède un certain savoir-faire (reconnu), je peux me vendre comme ingénieur pour un projet dont je ne serais pas l'auteur... Soit, pourquoi pas.

Mais les choses peuvent sérieusement se compliquer quand le client n'est ni dessinateur, ni architecte naval, ni designer.

Alors pour résumer, voilà comment les choses peuvent se présenter : Le client veut un style de bateau et s'adresse à un architecte naval connu pour ce qu'il a déjà fait. Il lui demande de présenter un avant projet sur la base d'un cahier des charges très précis, discuté et accepté au préalable.

Présentation des premiers croquis d'approche, premières critiques sur l'esthétique générale, deuxièmes critiques, troisièmes critiques...

Finalement le client n'aime pas l'esthétique proposée par l'architecte, il veut autre chose sans jamais dessiner lui-même quoi que ce soit. Il présente, comme exemple, des réalisations signées par les confrères !

Alors la question est : pourquoi est-il venu me voir ?

Pense-t-il que mon savoir-faire lui sera financièrement profitable ? Je suis en effet très spécialisé dans l'étude des navires en bois étudiés en kit. J'ai proposé dans la presse de réaliser des études personnalisées assez rapidement compte tenu de l'efficacité et de la maîtrise de mon outillage informatique, il est vrai, je le maintiens.

Mais je signe tous mes plans ; j'ai sans doute omis de le dire...

Une nouvelle profession est apparue, celle de "designer naval" qui prend en charge la partie esthétique extérieure et intérieure d'un navire.

L'architecte naval dessine la carène en fonction d'un devis de poids, je suppose, étudié de concert avec le designer. Les calculs de structures sont confiés à un bureau d'étude spécialisé. L'architecte naval synthétise les travaux des uns et des autres entre le designer, les ingénieurs, le voilier gréeur, le mécanicien, l'électricien, le plombier... Il fait en sorte que l'ensemble soit cohérent et respecte les contraintes de stabilité et les normes en vigueur. Les questions de performances sont d'un autre ressort. L'architecte naval n'existe plus beaucoup comme il était, c'est-à-dire comme je le suis encore.

C'est peut-être aussi pour cette raison que le client vient me voir. Mais finalement je n'en sais trop rien. Pense-t-il que je serais moins cher en faisant le travail de plusieurs personnes à moi tout seul ?

Alors est-ce une bonne méthode de partager le travail lors de la conception d'un navire ? Oui, manifestement

lorsqu'il s'agit d'un grand navire complexe avec des corps de métiers très différents et très spécialisés.

Mais la question subsiste pour un petit navire dit "de plaisance" (jusqu'à 24 mètres).

Là, on sait rapidement comment aborder les problèmes. Par exemple un bateau de tel type et de telle taille déplacera environ tel poids avec un CG à tel endroit, ce qui permet de tracer immédiatement les lignes du plan des formes. L'échantillonnage est déjà dans l'idée de l'architecte naval qui n'a pas besoin de l'aide d'un bureau d'étude de calculs de structure pour les vérifications et le dessin des détails. Il sait calculer sa structure, laquelle doit par ailleurs être obligatoirement validée par un bureau de certification, Veritas, Lloyd ou autres.

Le bateau est entièrement synthétisé dans la tête de l'architecte naval avec ses moindres détails avant de tirer le premier trait.

C'est peut-être ce que mes clients viennent chercher chez moi mais il ne faut pas me demander de signer des plans qui n'entrent pas dans ma manière de voir les choses.

J'insiste sur la notoriété qui est très importante pour l'architecte naval. Proposer un navire qui n'entre pas dans sa " signature " peut représenter un enterrement de première classe. Ce serait très dommageable après toutes ces années de travail pour se faire un nom.

Il reste encore une question sans vraiment de réponse : le constructeur amateur peut modifier à loisir la construction de son bateau sans respecter le plan de l'architecte, personne ne peut l'empêcher sinon le Bureau de

Certification ou de Classification si les normes ne sont plus respectées ; je pense en particulier aux normes de stabilité. Mais alors que devient l'objet une fois mis à l'eau ? Dira-t-on que ce bateau est signé par l'architecte qui aura produit les plans de ce navire dans cet état ?

Bien entendu, et cela peut devenir une contre-publicité car "l'image" de l'architecte se trouve modifiée sans son consentement.

Le problème est réel et le préjudice ne saurait être réparé à jamais.

## Notes

**Petit rappel** concernant  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Solution au problème du polynôme du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ , par exemple :

$$bx + ax^2 = -c$$

Multiplications terme à terme par  $4a$

$$4abx + 4a^2x^2 = -4ac \quad (1)$$

Posons  $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$

Donc  $(2ax + b)^2 - b^2 = 4a^2x^2 + 4abx$

On remarque que  $4abx + 4a^2x^2 = -4ac \quad (1)$

Alors  $(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$

Et donc  $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Autre manière** de résoudre le problème : (Régis)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$

On cherche à faire apparaître un carré parfait :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4ac} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4ac}$$

$$x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4ac} = -\frac{4a^2c + ab^2}{4a^2 \cdot a}$$

$$x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4ac} = -\frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

\*

**Résolution** de l'équation du 3<sup>ème</sup> degré (exemple possible) :  $-8x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

On cherche à factoriser au maximum par exemple suivant ce schéma :

$$(x+1)(ax^2 + bx + c) = -8x^3 + 9x^2 - 1 = 0$$

Il suffit que l'un ou l'autre (ou les deux) terme soit égal à zéro pour que le produit soit égal à zéro.

Développons  $(x+1)(ax^2 + bx + c) = 0$  :

$$ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = 0$$



Réduisons en factorisant :

$$ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c = 0$$

on sait que  $a = -8$  et  $c = -1$  dans notre équation à résoudre.

$$(b+a) = 9 \Rightarrow b = 9 - 8 = 1$$

$$(c+b) = 0 \Rightarrow b = 0 - c \Rightarrow b = 1 \dots\dots\dots \text{OK}$$

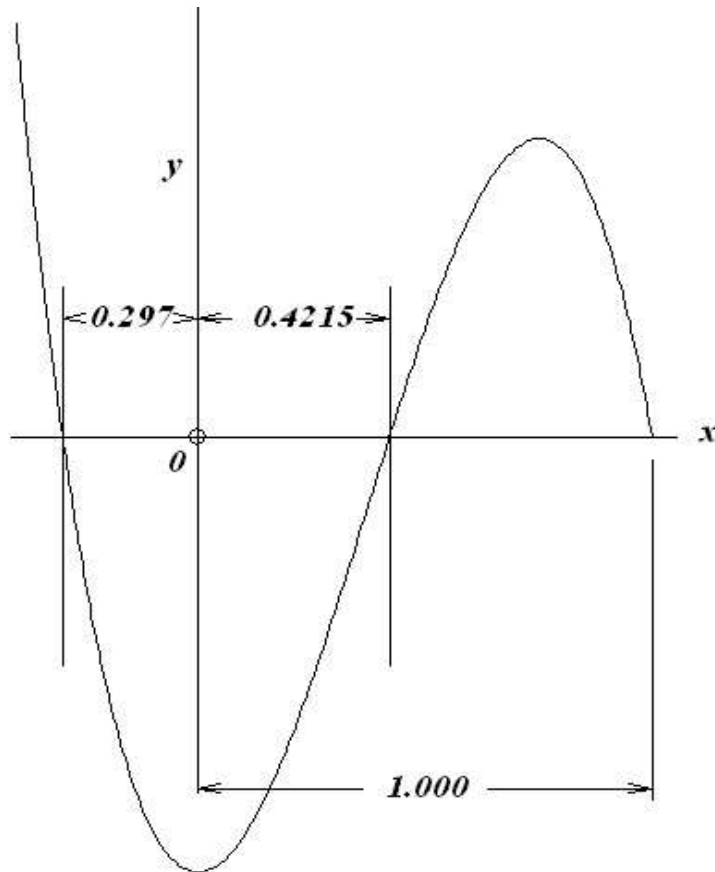
Essayons donc  $-8x^2 + x - 1 = 0$

Résolution de ce polynôme du second degré :

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times -8 \times -1}}{2 \times -8}$$

$$\frac{1 + \sqrt{33}}{16} = 0,4215 \text{ et } \frac{1 - \sqrt{33}}{16} = -0,2965$$



Fonction  $-8x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

Sinon, lorsqu'une racine est connue comme c'est le cas ici avec  $x=1$ , cela permet de déduire les deux autres racines si elles existent à l'aide de la formule suivante dont je laisse aux intéressés le soin d'entreprendre son « démontage ». Avec la racine connue, « r » = 1 :

$$x_2, x_3 = \frac{-b - ra \pm \sqrt{b^2 - 4ac - 2abr - 3a^2r^2}}{2a}$$

Dans notre cas cela donne, pour

$$a = -8$$

$$b = 9$$

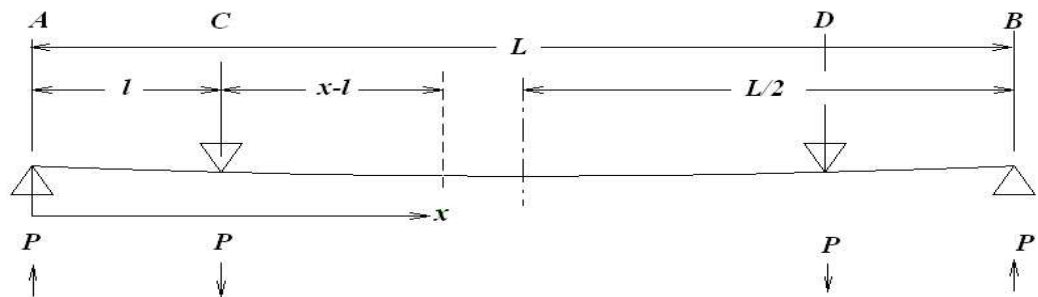
$$c=0$$

$$d=-1$$

$$r=1$$

$$\frac{1+\sqrt{33}}{16} = 0,4215 \text{ et } \frac{1-\sqrt{33}}{16} = -0,2965$$

### Flexion 4 points



La poutre de section constante est appuyée en A et B, elle supporte une charge  $P$  en C et  $P$  en D symétriquement.

La poutre est donc sollicitée entre 4 points.

La réaction sur les appuis A et B est par conséquent égale à  $P$  sur chacun des supports.

Utilisons, par exemple, la méthode de Mohr pour calculer la flèche entre A et B au milieu de la longueur «  $L$  ».

1 – Détermination des moments de flexion

$x$  est compté de A ( $x=0$ ) à B ( $x=L$ )

- Moment entre A à C :  $m = Px$

Avec un maximum en C égal à  $Pl$

Le moment de flexion croît linéairement de A à C

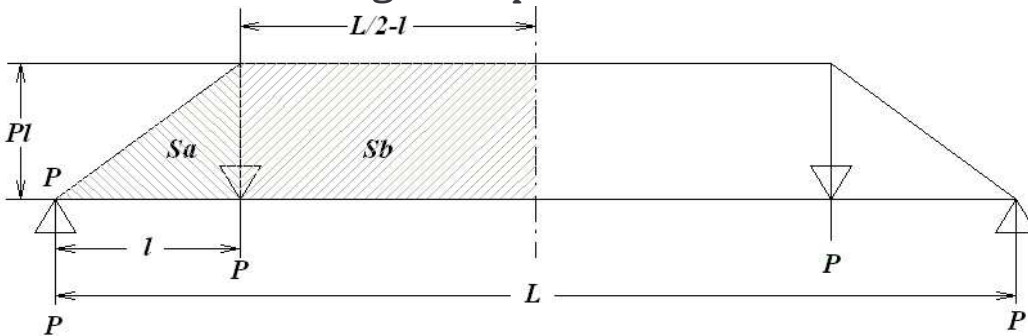
- Moment entre C et D :

$$m = Px - P(x - l) \Rightarrow m = Px - Px + Pl \Rightarrow m = Pl$$

Le moment de flexion entre C et D est constant =  $Pl$

Sachant que  $R = \frac{EI}{m}$ , la ligne élastique entre C et D sera un arc de cercle de rayon  $R = \frac{EI}{Pl}$  (1)

Le graphique des moments de flexion se présente de cette manière le long de la poutre :



2 - Ce qui permet de mesurer l'aire des surfaces comprises sous la courbe des moments de flexion, lesquelles devront être prises comme charges virtuelles dans notre calcul des flèches.

$$Sa = \frac{Pl \times l}{2} = \frac{Pl^2}{2} \quad \text{et} \quad Sb = Pl \left( \frac{L}{2} - l \right)$$

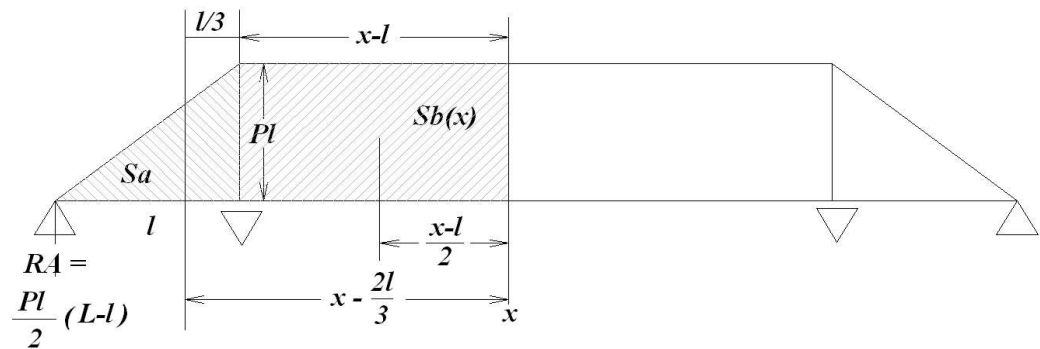
$$Sa + Sb = \frac{Pl^2}{2} + Pl \left( \frac{L}{2} - l \right) = \frac{Pl^2}{2} + \frac{PlL}{2} - \frac{2Pl^2}{2}$$

$$Sa + Sb = \frac{Pl}{2} (l + L - 2l) = \frac{Pl}{2} (L - l)$$

La réaction virtuelle en A de la charge virtuelle sera :

$$RA = \frac{Pl}{2} (L - l)$$

3 - Ce qui permet de déterminer les moments virtuels de flexion sous la ou les charges virtuelles :



Moment virtuel positif  $RAx$  :

$$RAx = \frac{Plx}{2}(L-l)$$

4 – Moments virtuels négatifs :

Moment de  $Sa$  :

Distance de son CG par rapport à  $x$  :  $x - \frac{2l}{3}$

Moment :

$$mSa = \frac{Pl^2}{2} \left( x - \frac{2l}{3} \right) = \frac{Pl^2 x}{2} - \frac{2Pl^3}{6} = \frac{3Pl^2 x}{6} - \frac{2Pl^3}{6}$$

$$mSa = \frac{Pl^2}{6} (3x - 2l).$$

Moment de  $Sb$  :

Distance de son CG par rapport à  $x$  :  $\frac{x-l}{2}$

Moment :

$$mSb = Pl(x-l) \times \frac{x-l}{2} = \frac{Pl}{2} (x-l)^2$$

Somme des moments  $mSa + mSb$

$$mSa + mSb = \frac{Pl^2}{6} (3x - 2l) + \frac{Pl}{2} (x^2 - 2xl + l^2)$$

$$mSa + mSb = \frac{3Pl^2x}{6} - \frac{2Pl^3}{6} + \frac{3Plx^2}{6} - \frac{6Pl^2x}{6} + \frac{3Pl^3}{6}$$

$$mSa + mSb = -\frac{3Pl^2x}{6} + \frac{Pl^3}{6} + \frac{3Plx^2}{6}$$

$$mSa + mSb = \frac{Pl}{6}(-3lx + l^2 + 3x^2)$$

5 – Total des moments virtuels :  $Rax - (mSa + mSb)$

$$Mv(x) = \frac{Plx}{2}(L-l) - \frac{Pl}{6}(-3lx + l^2 + 3x^2)$$

$$Mv(x) = \frac{3PlLx}{6} - \frac{3Pl^2x}{6} + \frac{3Pl^2x}{6} - \frac{Pl^3}{6} - \frac{3Plx^2}{6}$$

$$Mv(x) = \frac{3PlLx}{6} - \frac{Pl^3}{6} - \frac{3Plx^2}{6}$$

$$Mv(x) = \frac{Pl}{6}(3Lx - l^2 - 3x^2)$$

et

$$f(x) = \frac{Pl}{6EI}(3Lx - l^2 - 3x^2)$$

Pour  $x = L/2$  au milieu de la poutre :

$$Mv(L/2) = \frac{Pl}{6} \left( \frac{3L^2}{2} - l^2 - \frac{3L^2}{4} \right)$$

$$Mv(L/2) = \frac{Pl}{6} \left( \frac{6L^2}{4} - l^2 - \frac{3L^2}{4} \right)$$

$$Mv(L/2) = \frac{Pl}{6} \left( \frac{3L^2}{4} - l^2 \right)$$

$$M_v(L/2) = \frac{3PL^2l}{24} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{3PL^2l}{24} - \frac{4Pl^3}{24}$$

$$M_v(L/2) = \frac{Pl}{24}(3L^2 - 4l^2)$$

$$\text{flèche au milieu de } L : \frac{Pl}{24EI}(3L^2 - 4l^2)$$

### **Fèche de la partie entre A et C**

sur la longueur «  $l$  » :

$$\text{La réaction sur l'appui A reste } RA = \frac{Pl}{2}(L-l)$$

Surface du triangle délimité par le moment de flexion :

$$Sa(x) = \frac{Plx}{2} \text{ et } mSa(x) = \frac{Plx}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{Plx^2}{6}$$

Total du moment virtuel par rapport à  $x$  :

$$RAx - mSa(x) = \frac{Plx}{2}(L-l) - \frac{Plx^2}{6}$$

développons :

$$M_v(x) = \frac{3PlLx}{6} - \frac{3Pl^2x}{6} - \frac{Plx^2}{6} = \frac{Plx}{6}(3L - 3l - x)$$

Pour  $x = l$  :

$$M_v(l) = \frac{Pl^2}{6}(3L - 3l - l) \Rightarrow M_v(l) = \frac{Pl^2}{6}(3L - 4l)$$

Flèche sous la charge  $P$  en  $C$  :

$$f = \frac{Pl^2}{6EI}(3L - 4l)$$

Nous pouvons également calculer la flèche maxi de cette partie entre A et C en reprenant notre formule des flèches entre C et D avec  $x = l$  (au point d'application de la charge P)

$$f(x) = \frac{Pl}{6EI} (3Lx - l^2 - 3x^2)$$

Pour  $x = l$  :

$$f(l) = \frac{Pl}{6EI} (3Ll - l^2 - 3l^2) \Rightarrow f(l) = \frac{Pl^2}{6EI} (3L - 4l)$$

ce qui donne le même résultat par deux chemins différents.

**Il nous reste à vérifier** que la ligne élastique entre C et D est bien un arc de cercle de rayon  $R = \frac{EI}{Pl}$  (1)

comme nous l'avions vu précédemment.

Sans chercher la relation purement algébrique, donnons des valeurs à nos données, par exemple :

$$L = 1$$

$$l = 0,1$$

$$P = 3$$

$$EI = 1$$

Calcul de la flèche de l'arc :

$$f(L/2) = \frac{Pl}{24} (3L^2 - 4l^2) = 0,037$$

$$f(l) = \frac{Pl^2}{6} (3L - 4l) = 0,013$$

Flèche pour le calcul du rayon :

$$0,037 - 0,013 = 0,024$$



$$R = \frac{f}{2} + \frac{c^2}{8f} \text{ avec}$$

$$c = L - 2l = 0,8 \text{ (la corde)}$$

on trouve :  $R = 3,3453333$

Autre calcul :

$$R = \frac{EI}{Pl} = \frac{1}{3 \times 0,1} = 3,333$$

Le résultat du calcul du rayon avec  $R = \frac{EI}{Pl}$  est à multiplier par un coefficient  $k = 1,0036$  pour coller au calcul précédent avec la corde et la flèche obtenue par la RDM.

Approfondir.....

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

### **Les membrures dévoyées**

Petit lexique :

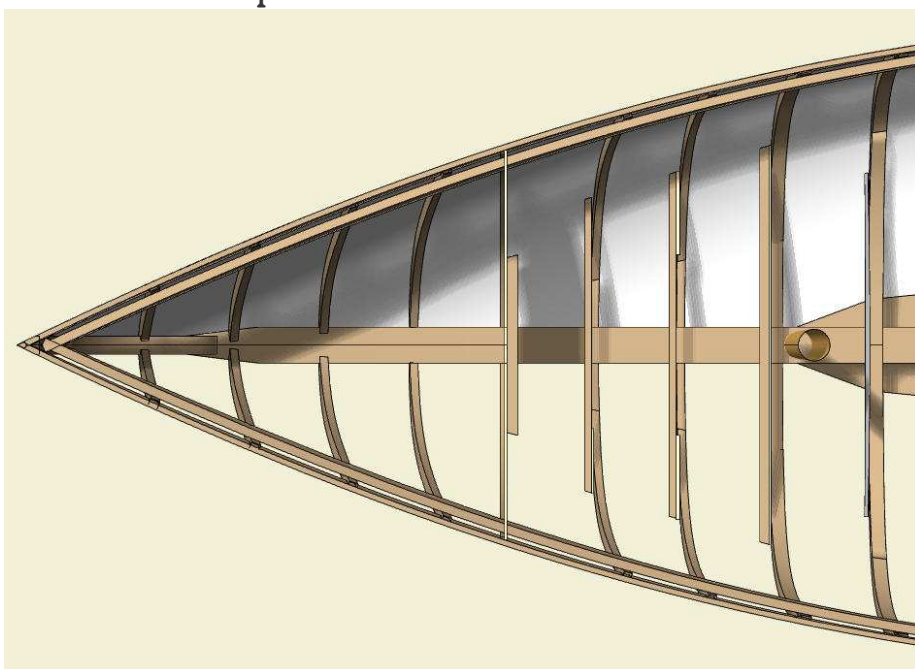
Quille : pièce maîtresse de la structure du navire. Elle court de l'avant à l'arrière et supporte les varangues, les membrures et les cloisons.

Livet : ligne de jonction entre le bordé et le pont.

Ce type de membrures porte ce nom car elles ne sont pas construites selon un plan transversal ou selon les « couples ». Elles ne se présentent pas de manière perpendiculaire à la longueur du navire et ne

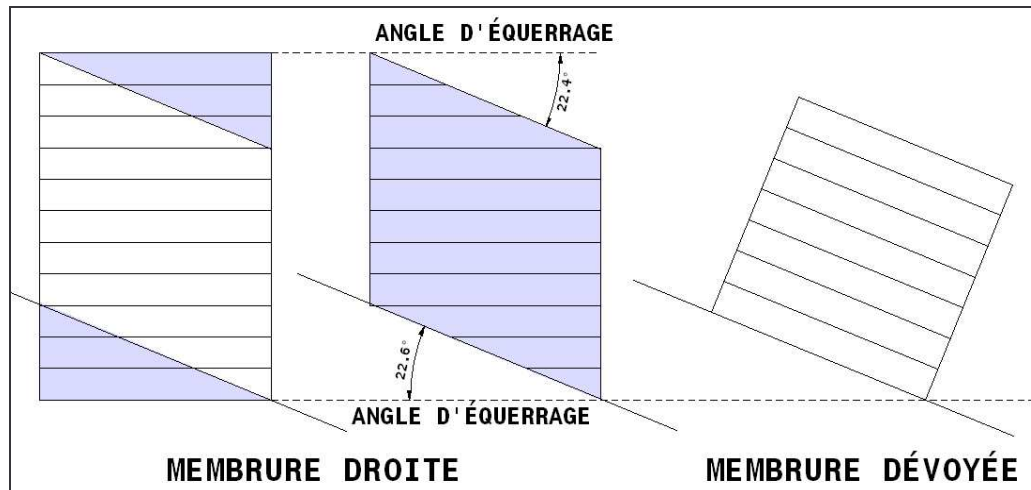
sont pas parallèles entre elles comme le sont les membrures classiques.

Les membrures dévoyées ont la particularité de suivre naturellement la forme de la coque en l'épousant parfaitement sans être cintrées sur chant mais uniquement dans leur épaisseur.



Elles sont constituées de plis assez minces pour être contrecollés à froid directement à l'intérieur de lisses provisoires montées sur le mannequin de forme. Ce qui signifie que les plis sont tous rectilignes et parfaitement développables ; ils ne seront cintrés que dans le sens de leur épaisseur et ne nécessiteront aucun « équerrage ».

Qu'est-ce que l'équerrage ?



Le croquis parle de lui-même mais ne montre pas que la membrure droite doit être équerrée selon un angle variable tout au long de sa longueur : près de la quille elle ne sera pratiquement pas équerrée alors qu'elle le sera beaucoup plus près du livet, selon l'endroit où elle se trouvera. Il faut noter que cette membrure ne sera pas contrecollée directement dans le mannequin de construction mais sur un moule préparé spécialement pour elle, et elle seule, justement à cause de la nécessité de l'équerrer après collage et après son installation. Il est possible de l'équerrer à partir des plans de forme mais cela demande beaucoup de préparation et beaucoup de métier.

La membrure dévoyée travaille de façon plus efficace et garde sa section intacte sur toute sa longueur. Elle ne nécessitera qu'un rabotage des chants pour être finie et prête à être installée à son emplacement. Les pertes de bois sont moins importantes bien que cela ne soit pas déterminant sur l'ensemble de la construction du navire.

En revanche, sa conception demande plus de soin pour répartir correctement les membrures dévoyées dans le dessin du plan de construction général. Il faut donc prévoir la manière dont elles seront dévoyées et prévoir le mannequin en conséquence afin de pouvoir assembler et coller les plis de lamellé-collé entre les gabarits de forme en aggloméré ou bois perdu.

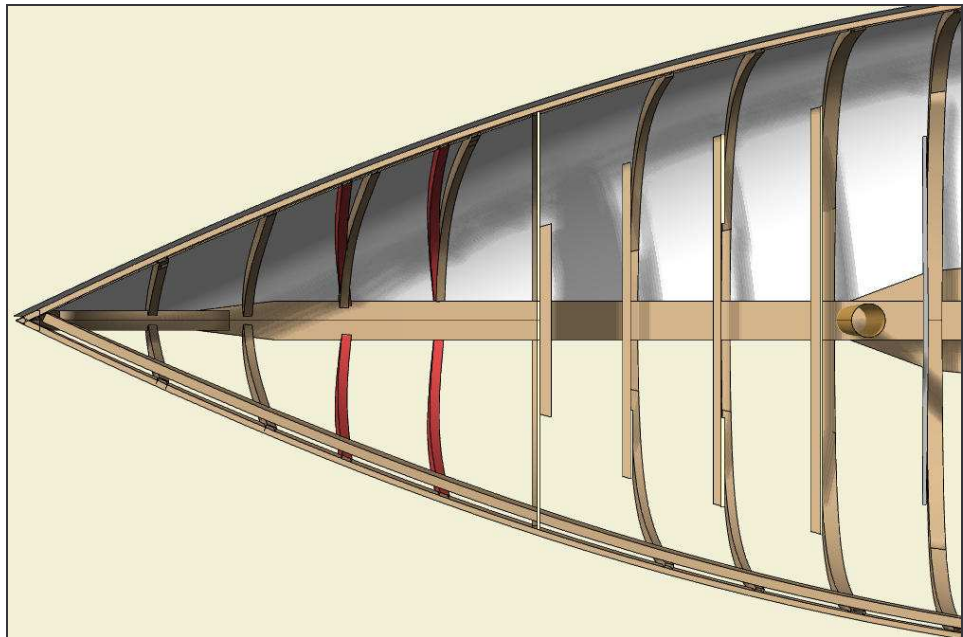
Il est vrai que les membrures équerrées droites classiques constituent directement la structure et reçoivent le bordé. Cela permet de construire « à l'ancienne » le navire à l'endroit. Cette méthode peut se présenter comme un avantage dans certain cas, c'est un choix de conception plus simple sans informatique mais moins avantageux en terme de nombre d'heures et de poids à résistance égale. L'informatique résout les problèmes de conception de manière spectaculaire...

[Il faut noter qu'un type de construction « classique » consiste à préparer des membrures droites chantournées assez espacées et d'installer entre elles, après coup dans le bordé, des membrures étuvées bien parallèles. Cette méthode demande un certain savoir faire car la membrure étuvée est installée bouillante à sa place en la « vrillant » et en la forçant pour plaquer une face à plat contre le bordé. Des rivets en cuivre finissent de la maintenir en place. On comprend que l'échantillonnage de ce type de membrure ne peut pas être très important et que cela était compensé par le nombre d'unités.]

Une membrure dévoyée peut être installée à peu

près n'importe comment dans la coque, très droite ou très en biais tout est possible. En général elle sera supportée en son pied, près de la quille, par une varangue massive droite, c'est-à-dire installée perpendiculairement à l'axe du navire. Dans ce cas on démarre le futur le chemin de la membrure bien perpendiculaire à la quille et on la laisse aller de la manière qui lui plaît pour épouser le bordé, jusqu'au livet.

Sinon on peut décider que la cote longitudinale ( $x$ ) de départ à la quille sera également la cote d'arrivée au livet, et entre les deux la membrure sera libre de vivre sa vie :



Ici, les membrures en rouge sont déterminées avec la même cote horizontale ( $x$ ) à la quille et au livet. Dans ce cas le départ à la quille ne sera pas perpendiculaire.

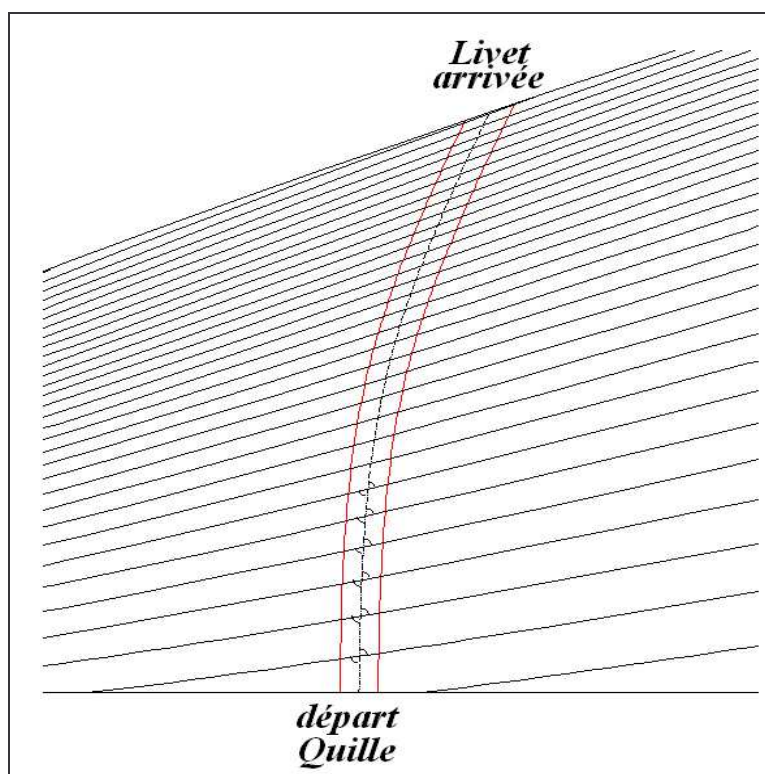
Mais comment prévoir le chemin d'une membrure dévoyée en fonction de ces impératifs géométriques ?

Dans un premier temps, il faut disposer d'une forme

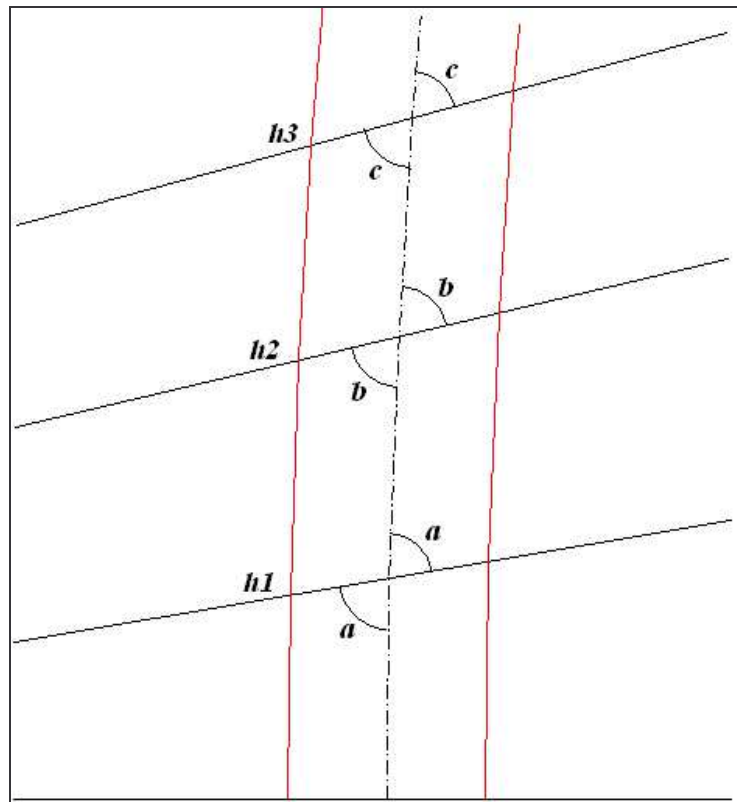
de coque informatisée avec un accès aux cotes xyz à n'importe quel endroit de l'intérieur du bordé. On ne conçoit pas de dessiner ce genre de chose à la main, non pas que ce soit impossible mais impossiblement long !

D'abord le principe :

Imaginons de découper la coque en un certain nombre de tranches horizontales, par exemple espacées de 20 mm. Ensuite posons une règle plate bien perpendiculairement à la quille, si cela est imposé. Sans la faire glisser, faisons-là pivoter de manière à ce qu'elle se pose maintenant à la fois sur la quille et sur la ligne de la première tranche horizontale. Puis nous continuons de la faire pivoter de manière à la poser à la fois sur la première ligne et sur la ligne de la deuxième tranche sans la faire glisser, et ainsi de suite.



De proche en proche nous arriverons au livet en respectant scrupuleusement les angles comme illustré ci-dessous :



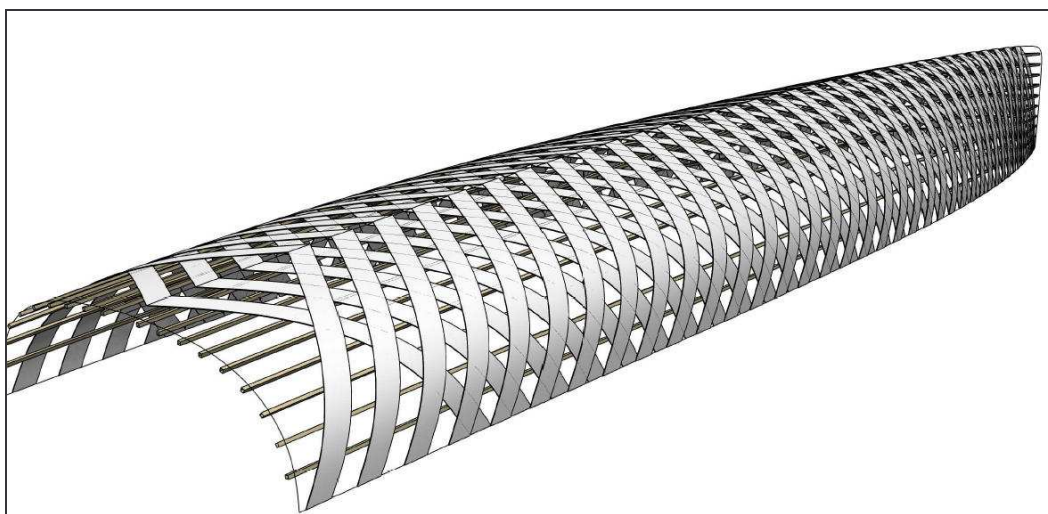
L'horizontale  $h2$  est située à 20 mm sous  $h1$  et  $h3$  est située à 20 mm sous  $h2$  dans cette figure. On effectuera les calculs uniquement sur l'axe central de la membrure en respectant toujours les angles comme indiqué de proche en proche. Évidemment ces angles ne se mesurent pas sur le dessin en 2 dimensions mais dans un espace à 3 dimensions. La théorie est simple, la mise en œuvre l'est beaucoup moins !

Lorsque le point d'arrivée sur le livet est imposé, il n'y a pas d'autre manière de faire que d'essayer un chemin puis de recommencer autant de fois que nécessaire pour satisfaire la contrainte. L'informatique se charge de ce travail très rapidement, il suffit de programmer tout cet ensemble, ce qui m'a pris « un cer-

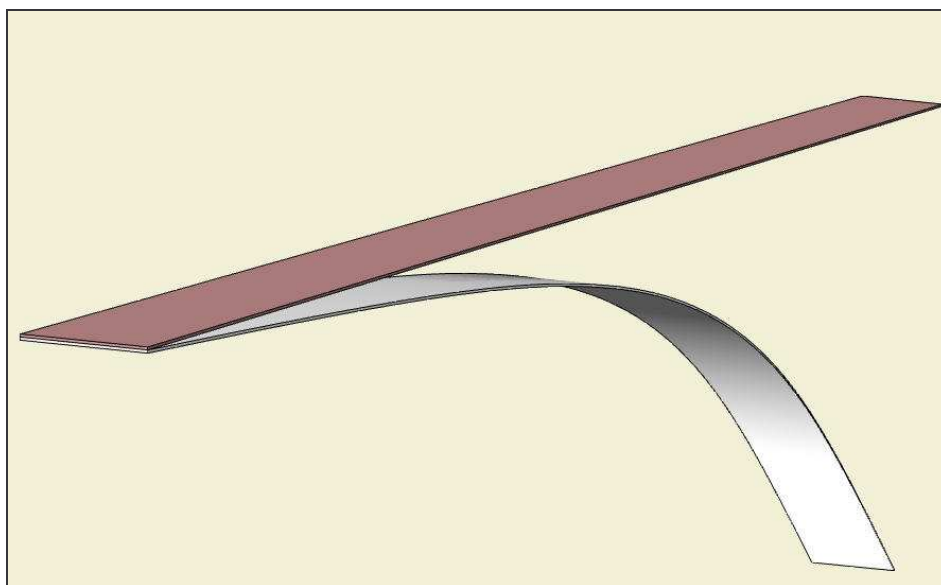
tain temps » !

Une fois que le travail fonctionne et donne un premier résultat, on vérifie avec un programme de dessin en 3D que la surface ainsi définie est bien rectiligne une fois développée !

Le procédé fonctionne de la même manière pour dessiner les plis de bois moulé en partant du principe que le départ est orienté selon un angle par exemple  $45^\circ$  vers l'avant ou vers l'arrière.



Exemple d'un pli «déroulé», parfaitement rectiligne :







Exemple de membrures dévoyées dans la cabine avant de « Maximus » avec la même cote  $x$  à la quille et au livet.

## **Remerciements**

À tous ceux qui m'ont aidé dans la rédaction de cet ouvrage. Merci.

À Régis Mostaert, professeur de mathématiques

À Didier Roussel pour sa pertinence

À Gilles Thésée, professeur de physique, pour son aide théorique et pratique pendant la construction du voilier « Gorfou » de 6,50 m

## **Bibliographie**

Résistance des Matériaux  
M. Kerguignas et G. Caignaert  
Éditions Dunod

Aide-mémoire  
Résistance des matériaux  
Jean Goulet, Jean-Pierre Boutin, Frédéric Lerouge  
Éditions Dunod

Aide-mémoire  
Mathématiques  
Daniel Fredon  
Éditions Dunod

Formulaire technique  
De Mécanique générale  
Par Jacques Muller  
Chevalier dans l'ordre national du mérite  
Imprimerie F. Paillart  
BP 109  
80103 Abbeville Cedex

Formulaire Technique Gieck  
École d'ingénieurs de Bienne – Suisse  
Gieck Verlag  
D-82110 Germering

Loisirs Nautiques  
Connaissance du tracé des carènes  
Cyril Grandpierre

Naval Architecture for Marine Engineers  
W.Muckle  
Butterworths